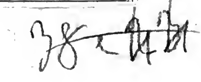



FONDO PIZZOFALCONE







TRAITÉ
DE GÉODÉSIE.

TRAITÉ
DE GÉODÉSIE,

OU

Exposition des Méthodes Astronomiques et Trigonométriques, appliquées soit à la mesure de la Terre, soit à la confection du canevas des Cartes et des Plans,

PAR L. PUISSANT,

Professeur de Mathématiques à l'École Impériale militaire ; ancien Ingénieur géographe du dépôt général de la guerre, et Membre de la Société libre des sciences et belles-lettres d'Agen.



A PARIS,

Chez Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

AN XIV = 1805.

PRÉFACE.

La France est, sans contredit, de toutes les nations éclairées, celle qui a contribué le plus aux progrès de la géographie, et qui possède ou recueille maintenant un plus grand nombre de chefs-d'œuvres topographiques. Pénétré de cette vérité et animé du seul desir d'être utile à ceux qui s'occupent de travaux de ce genre, j'avais d'abord conçu le projet de donner de l'extension au Mémoire qui a paru dans un des numéros du Mémorial du Dépôt général de la Guerre, sous le titre d'*Analyse appliquée aux opérations géodésiques;* mais l'ouvrage que je publie en ce moment offre une collection complète des méthodes d'observations et de calculs les plus exactes et les plus rigoureuses que les géomètres aient employées relativement à la mesure de la terre. Il m'a paru qu'en réunissant ainsi en corps de doctrine toutes ces méthodes, également applicables à la confection du canevas des cartes et des plans, je formerais un Traité neuf, à certains égards, et qui pourrait être considéré comme la partie fondamentale de la science de l'ingénieur-géographe.

Les travaux géodésiques auxquels j'ai coopéré, ou dont j'ai été moi-même spécialement chargé par le Dépôt général de la Guerre, m'ont donné l'occasion de recueillir un grand nombre d'observations utiles, et de faire quelques recherches importantes sur cet objet. Néanmoins l'Exposi-

tion du Système du monde, la Mécanique céleste et les Mémoires de MM. Legendre et Delambre, relatifs à la détermination d'un arc du méridien, m'ont procuré les matériaux les plus précieux, et m'ont guidé dans l'application que j'ai faite des deux trigonométries à la formation des cartes.

Afin de rendre plus élémentaires quelques-uns des procédés analytiques de ces illustres géomètres, j'ai mis en évidence tous les artifices de calculs qui s'y rapportent, simplifié diverses solutions et développé quelques théories intermédiaires qui ne sont souvent qu'ébauchées dans les ouvrages que j'ai consultés. Enfin j'ai tâché d'imiter dans tous mes calculs l'élégance de ceux des analystes modernes, et de présenter avec clarté le type de toutes les opérations numériques qui pourraient paraître difficiles à ceux qui ne sont pas très-familiarisés avec l'usage des logarithmes et l'application des formules algébriques.

Cet ouvrage est divisé en cinq Livres; le premier, qui contient des notions de la sphère et du mouvement des corps célestes, m'a paru indispensable pour la parfaite intelligence de ce qui concerne particulièrement les observations astronomiques et les calculs auxquels elles donnent lieu.

Le second Livre est spécialement destiné à rappeler les principes généraux de la résolution des triangles, tant rectilignes que sphériques, et à faire connaître les moyens d'abréger la résolution des triangles dans quelques cas particuliers, c'est-à-dire de substituer aux formules rigoureuses,

des formules approximatives dont l'exactitude est suffisante dans la pratique. Ce Livre est terminé par une digression sur la recherche analytique des propriétés du cône et de celles de la projection stéréographique des cercles de la sphère. Ici, comme partout où il s'agit d'appliquer l'algèbre à la géométrie, j'ai adopté la méthode de MM. Monge et Lacroix, parcequ'elle est la plus générale et la plus lumineuse. Quelques personnes penseront peut-être que j'aurais dû parler, en outre, des différentes sortes de projections employées dans la construction des *cartes chorographiques et géographiques*, c'est-à-dire des cartes qui n'embrassent que l'étendue d'un royaume ou qui comprennent une plus grande partie du globe; en effet les unes et les autres que j'ai désignées uniquement sous le nom de *cartes géographiques*, tirent les élémens de leur construction des résultats mêmes de la triangulation, ou des latitudes et des longitudes observées; mais j'ai cru, à cet égard, pouvoir renvoyer au Traité des Projections, par M. Lacroix, formant l'Introduction à la Géographie de M. Pinkerton.

Le troisième Livre est entièrement consacré à l'exposition des opérations géodésiques; elles ont principalement pour objet la mesure des angles, celle des bases, les calculs des côtés des triangles, des longitudes, latitudes et azimuths des points fondamentaux d'une carte. Afin que ce Traité puisse servir aux personnes qui lèvent des plans de peu d'étendue, comme à celles qui entreprennent de grands travaux géodésiques, j'ai exposé diverses méthodes pour

remplir ce double but; mais j'ai seulement donné la description et fait connaître l'emploi du cercle répétiteur; parceque cet instrument offrant beaucoup de précision dans la mesure des angles, doit pour cette raison interdire l'usage du graphomètre et même du quart de cercle astronomique.

Il convenait en outre de présenter dans ce Livre quelques-unes des méthodes analytiques à l'aide desquelles on a reconnu plus particulièrement l'irrégularité du sphéroïde terrestre; c'est dans cette vue que j'ai surtout rapporté avec beaucoup de détail la savante théorie que M. Laplace a donnée à ce sujet dans sa Mécanique céleste, et de laquelle il tire, par des considérations fines et une analyse délicate, des conséquences très-remarquables.

La carte d'un pays ne pouvant fournir toutes les données nécessaires à la construction d'un relief, si elle n'est accompagnée de divers profils formés dans le sens de la direction des grandes chaînes de montagnes et de leurs contreforts, ou bien suivant telle autre direction propre à exprimer les mouvemens les plus sensibles du terrain, il est essentiel que cette carte renferme, outre les distances entre les objets, leurs hauteurs au-dessus d'une surface de comparaison, comme celle de la mer. Ces hauteurs ou différences de niveau qui, avec les distances à la méridienne et à la perpendiculaire, forment les trois coordonnées du point que l'on considère, peuvent être déduites, avec beaucoup de précision, des opérations trigonométriques

triques

triques, ou être déterminées assez exactement par les mesures barométriques et suivant la belle théorie de M. Laplace; j'expose en conséquence ces deux moyens avec tout le soin possible, et c'est par là que je termine la Géodésie proprement dite.

Le quatrième Livre présente plusieurs problêmes d'Astronomie dont les solutions sont très-souvent employées dans les grands levés : j'ai, à cet effet, montré l'usage des Tables de la Connaissance des Temps, pour calculer la déclinaison du soleil, le passage des étoiles au méridien, etc...

Le cinquième et dernier Livre est relatif à la théorie et à la pratique des observations astronomiques les plus utiles en géodésie. J'y enseigne, par exemple, la manière de régler une pendule sur le moyen mouvement du soleil ou sur les étoiles; et je donne, dans le plus grand détail, le calcul des latitudes, des longitudes et des azimuths observés.

Enfin l'Appendice contient une description du cercle répétiteur, plus complète que celle qui fait en partie le sujet du troisième chapitre du Livre III. Elle peut être principalement utile aux artistes qui, n'ayant sous les yeux que les huit dernières planches de cet Ouvrage, voudraient construire le cercle ou se mettre en état de refaire quelques-unes de ses parties. Cet Appendice renferme en outre le précis d'une nouvelle méthode de M. Laplace, pour déterminer géométriquement les hauteurs des montagnes très-élevées: j'ai seulement assujéti les formules de ce savant

illustre, à la notation que j'ai adoptée dans l'exposition d'une théorie à laquelle ceci sert de complément; et pour dispenser le calculateur de recourir sans cesse aux formules dont il peut avoir besoin, j'ai donné un grand nombre de Tables dont la plupart sont nouvelles.

Tels sont les principaux objets qui entrent dans cet Ouvrage. Malgré tous mes efforts pour le perfectionner et le porter à la hauteur des connaissances actuelles, je regrette de ne m'être pas trouvé fréquemment en situation de pouvoir profiter des lumières de plusieurs savans de la capitale, qui m'honorent de leur estime, ainsi que des conseils de quelques ingénieurs de mes amis, qui cultivent avec succès les mathématiques appliquées. Puisse ce Traité de Géodésie leur inspirer assez d'intérêt pour qu'ils daignent me faire part des améliorations dont il est susceptible, et me mettre, un jour, à même d'élever à la science un monument plus durable!

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE PREMIER.

THÉORIE ABRÉGÉE DE LA SPHÈRE ET DU MOUVEMENT DES CORPS CÉLESTES.

CHAP. III. *De la position des astres par rapport à l'équateur, à l'écliptique et à l'horizon,* 7

CHAP. IV. *Du mouvement réel de la terre autour du soleil, et des latitudes et longitudes géographiques,* 9

LIVRE II.

EXPOSITION SOMMAIRE DES DEUX TRIGONOMÉTRIES.

LIVRE III.

OPÉRATIONS GÉODÉSIQUES.

LIVRE IV.

PROBLÈMES D'ASTRONOMIE.

LIVRE V.

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES.

FIN DE LA TABLE.

TRAITE

TRAITÉ DE GÉODÉSIE.

LIVRE PREMIER.

THÉORIE ABRÉGÉE DE LA SPHÈRE ET DU MOUVEMENT DES CORPS CÉLESTES.

CHAPITRE PREMIER.

Du mouvement apparent de la sphère céleste.

1. L'HORIZON SENSIBLE est le plan tangent à la surface de la terre supposée sphérique, et le point de contact est le lieu même de l'observateur.

L'horizon rationnel est le plan qui passant par le centre de la terre, est parallèle à l'horizon sensible. La ligne joignant le lieu de l'observateur et le centre de la terre, et prolongée de part et d'autre dans le ciel, est la *verticale* de ce lieu. Enfin le point de cette ligne qui répond au-dessus de l'observateur, est le *zénith*, et le point opposé est le *nadir*.

Lorsque, pendant la nuit, les étoiles brillent, on les voit

s'élever ou s'abaisser sur l'horizon en conservant toujours leurs positions respectives. On est donc tenté d'attribuer à la sphère céleste un mouvement de rotation d'orient en occident, et de considérer le centre de la terre comme celui de cette sphère. Les *pôles du monde* sont les extrémités de la droite autour de laquelle ce mouvement paraît s'effectuer.

Le pôle élevé sur notre horizon est le *pôle boréal* ou *septentrional*, ou simplement *nord*, et le pôle opposé que l'on imagine au-dessous de ce même horizon, est le pôle *austral* ou *méridional*, ou simplement *sud*. La ligne qui joint les deux pôles s'appelle *axe du monde*, et le cercle passant par le zénith et par les pôles se nomme *méridien*.

Les étoiles dispersées dans l'espace, et supposées toutes aux confins de la sphère céleste, décrivent donc dans leurs mouvemens des cercles d'autant plus petits qu'elles sont plus près des pôles du monde; le plus grand de tous ces cercles est évidemment celui dont tous les points sont également distans des deux pôles : on le nomme *équateur*. Quant aux cercles parallèles à celui-ci, on les désigne simplement sous le nom de *parallèles*. Les pôles du monde sont les pôles mêmes de l'équateur.

2. Les étoiles qui ne changent pas de place les unes à l'égard des autres, se nomment par cette raison *étoiles fixes*; pour les reconnaître plus facilement, on les a classées par groupes désignés sous le nom de *constellations*: vues de la terre, elles nous paraissent toujours dans un lieu différent de celui qu'elles occupent réellement. L'une des causes de cette illusion résulte du temps que la lumière des étoiles met pour venir jusqu'à nous; et c'est en cela que consiste le phénomène de l'*aberration*.

Quelle que soit l'inclinaison de l'axe du monde sur l'horizon, la durée de la présence d'une étoile qui décrit l'équateur est la même au-dessus de l'horizon qu'au-dessous; mais une étoile qui décrit un parallèle est visible, d'autant plus long-temps que ce parallèle est plus près du pôle élevé, et que l'angle que l'axe du monde fait sur l'horizon diffère moins de l'angle droit. Ainsi au pôle les étoiles ne se lèvent ni ne se couchent jamais : il en est de même de celles qui décrivent des parallèles dont le plan n'est point coupé par l'horizon. Telles sont, par exemple, les étoiles de la *grande ourse*, la *polaire*, etc.

CHAPITRE II.

Du mouvement propre du soleil, et de la mesure du temps.

3. Le soleil, comme toutes les étoiles fixes, semble emporté d'orient en occident par le mouvement périodique du ciel. Cependant on s'apperçoit bientôt qu'il ne conserve pas la même position par rapport aux étoiles, et qu'il est doué d'un mouvement propre d'occident en orient. Après une longue suite d'observations exactes de la hauteur méridienne du soleil et de l'intervalle de temps qui s'écoule entre son passage et ceux des étoiles au méridien, l'on a reconnu d'une manière très-précise que le soleil se meut dans un orbe qui, d'après les observations les plus récentes, est incliné de 23° 28′ 6″,5 à l'équateur. Cet orbe se nomme *écliptique*, et est supposé divisé en douze parties égales, ou en douze signes de 30 degrés chacun, en partant du point où le soleil se trouve au commencement du printemps.

L'inclinaison de l'orbe solaire sur l'équateur, ou l'*obliquité de l'écliptique* n'est pas constante; cependant sa diminution séculaire n'est que de 33″ environ. D'après la théorie, cette obliquité ne sera jamais nulle; ainsi la terre ne jouira jamais d'un printemps perpétuel.

Les *cercles polaires* sont deux petits cercles de la sphère qui passent par les pôles de l'écliptique, leur distance aux pôles du monde est donc la même que l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur.

4. La différence des saisons résulte essentiellement de la combinaison du mouvement propre du soleil avec son mouvement diurne. On appelle *équinoxes* les points d'intersection de l'écliptique avec l'équateur; parcequ'en effet quand le soleil arrive à ces points, les jours sont égaux aux nuits. Les jours croissent à

mesure que le soleil partant de l'équinoxe du printemps, avance dans son orbe vers le pôle élevé, et le point où répond la plus grande hauteur du soleil est le *solstice d'été*. A cette époque, le jour est le plus long de l'année. Cet astre ensuite continuant de décrire son orbe, traverse l'équateur à l'*équinoxe d'automne*, et lorsqu'il arrive au point où sa hauteur est la plus petite, il est au *solstice d'hiver*, c'est le moment où le jour est le plus court de l'année. Les parallèles qui passent par les deux points des solstices se nomment *tropiques*.

Le soleil ne parcourt pas uniformément les quatre arcs de son orbe, déterminés par les points équinoxiaux et solsticiaux; car il met environ sept jours de plus pour aller de l'équinoxe du printemps à celui d'automne, que pour aller de ce dernier équinoxe à celui du printemps. On s'est convaincu que sa course devient de plus en plus rapide, lorsqu'il part des environs du solstice d'été pour se rendre au solstice d'hiver. Le premier point de son orbite le plus éloigné de la terre, et où sa vîtesse est la plus petite, se nomme *apogée;* le point opposé, qui est le plus près de la terre, et où sa vîtesse est la plus grande, se nomme *périgée*. La marche du soleil se ralentit ensuite quand cet astre revient du périgée à l'apogée, et elle est constamment soumise à cette loi remarquable, savoir, que les *aires décrites par le rayon vecteur du soleil,* c'est-à-dire, par la droite qui joint les centres de la terre et du soleil *sont proportionnels au temps.*

La connaissance précise que l'on a acquise de la longueur et de la position du rayon vecteur du soleil pour chaque jour de l'année, a conduit naturellement à cette autre, savoir, que l'*orbe solaire est une ellipse peu alongée, dont le centre de la terre occupe un des foyers.* Le soleil, dans son moyen mouvement, décrit par jour 0° 59′ 8″ de cet orbe que l'on suppose circulaire dans les applications de l'astronomie à la géographie.

5. On aurait pu, dans l'usage civil, employer à la mesure du temps les révolutions périodiques du ciel, parcequ'elles paraissent toujours d'égale durée; mais le soleil étant de tous les astres celui qui fixe plus particulièrement notre attention, l'on a été naturellement porté à prendre pour la longueur du jour et celle de l'année les intervalles de temps qui s'écoulent entre deux retours consécutifs du soleil au même méridien et au même équinoxe.

En astronomie, l'on considère principalement deux sortes de jours, composés l'un et l'autre de 24 heures; l'un est le *jour sydéral*, ou du *premier mobile*, lequel comprend une révolution entière du ciel, ou le retour d'une étoile au méridien; l'autre est le *jour astronomique*, ou le *jour vrai;* c'est l'intervalle de temps compris entre deux midis ou entre deux minuits consécutifs.

Les astronomes comptent les 24 heures d'un midi à l'autre, au lieu que dans la vie civile le jour est l'intervalle de deux minuits consécutifs; ainsi, par exemple, le 6 janvier à 9 heures du matin, *temps civil*, répond au 5 janvier à 21 heures, *temps astronomique*. Cependant il paraît que les astronomes, qui ne trouvent à cet égard aucun avantage réel dans leur manière de compter, se conforment maintenant à l'usage général (*Voyez* l'Astron. phys. de Biot, n° 94.); mais les observations que nous rapporterons par la suite, comme exemples de calculs, ayant été faites antérieurement à cette convention, nous compterons les jours astronomiques comme à l'ordinaire.

Les jours astronomiques ne sont pas tous égaux entr'eux comme les jours sydéraux, et ils sont plus longs que ceux-ci de plusieurs minutes; car lorsqu'une étoile et le soleil se trouvent en même temps au méridien un certain jour, le lendemain le soleil, en vertu de son mouvement propre d'occident en orient, passe au méridien plus tard que l'étoile, et après avoir décrit environ 59′ 8″ de degré de son orbite. Parconséquent, dans l'espace d'une année le soleil traverse le méridien une fois de moins que l'étoile.

Nous venons d'observer que les jours astronomiques ne sont pas égaux; leurs différences résultent à-la-fois de l'obliquité de l'écliptique et de ce que le mouvement propre du soleil n'est pas uniforme: ainsi les oscillations du pendule d'une bonne horloge étant *isochrones*, ou d'égale durée, peuvent bien être réglées sur le mouvement diurne des étoiles, mais non pas sur la marche du soleil. Cependant en faisant abstraction des inégalités de cette marche, ou pour mieux dire, en supposant qu'un autre soleil décrive l'équateur en vertu d'un moyen mouvement, l'intervalle compris entre deux de ses retours consécutifs au méridien, formera un *jour moyen* astronomique entre tous les jours vrais ou *apparens*, et l'horloge qui sera réglée sur le mouvement uniforme

de ce soleil fictif se trouvera d'accord avec le vrai soleil quatre fois dans l'année. On nomme *équation du temps* la différence positive ou négative entre un jour vrai quelconque et le jour moyen correspondant. Cette différence, calculée pour chaque jour, se trouve sous le titre de *temps moyen* ou *au midi*, dans la Connaissance des Temps que le Bureau des Longitudes publie chaque année, et elle sert à faire connaître si une horloge est bien réglée, comme on le verra par la suite.

En prenant pour unité de temps le jour moyen astronomique, on trouve que la durée du jour sydéral est de $0^{j.m},997269722$, c'est-à-dire, de $23^h\ 56'$; d'où il suit que l'accélération diurne des étoiles est de $4'$, par rapport au moyen mouvement du soleil; en vertu de ce mouvement le soleil emploie $365^{j.m},242222$ à revenir à l'équinoxe du printemps. Cette durée forme *l'année tropique*.

Il résulte de là que si l'on prend le jour sydéral pour unité, le jour moyen solaire sera exprimé par $1^{j.syd.},002737752$, ou $24^h\ 3'\ 56'',54$; ainsi lorsque l'on aura des heures moyennes solaires à convertir en heures sydérales, ce qui se pratique très-souvent en astronomie, il faudra augmenter les premières de $9'',8568$, ou simplement de $10''$, si l'on juge que cette exactitude soit suffisante.

Le temps qui s'écoule entre les deux retours du soleil au même point du ciel ou aux mêmes étoiles, constitue *l'année sydérale*; celle-ci est plus longue que l'année tropique, de $0^j,014119$; ainsi les équinoxes rétrogradent, à l'égard du soleil, de $50'',1$ de degré par an: c'est ce mouvement des *nœuds* de l'écliptique que l'on nomme *précession des équinoxes*.

6. Newton découvrit le premier que tous les corps ont la propriété de s'attirer réciproquement en raison composée de la directe des masses et de l'inverse du quarré des distances. C'est à cette loi générale de la nature que sont dues les perturbations des corps célestes et le phénomène de la *nutation*, lequel consiste dans de petites oscillations qui abaissent et élèvent alternativement l'axe de la terre de $18''$ environ, sur le plan de l'écliptique et dans l'espace de 18 ans.

Le mouvement moyen de la ligne des équinoxes éprouve, par les mêmes causes, de petites inégalités dont la période est la même que celle de la nutation.

CHAPITRE III.

De la position des astres, par rapport à l'équateur, à l'écliptique et à l'horizon.

7. Il est évident, d'après ce qui précède, qu'une étoile décrit 15° de son parallèle pendant une heure sydérale; de même, lorsque le centre du soleil arrive au méridien après une heure vraie ou apparente, il a parcouru, par rapport à l'équateur, un arc de 15°. Cet arc, converti en temps, s'appelle l'*angle horaire* de l'astre; il doit toujours être pris sur l'équateur, depuis le méridien jusqu'au *cercle de déclinaison* qui passe par le centre de l'astre et par les pôles.

La déclinaison d'un astre est sa distance à l'équateur, mesurée sur son cercle de déclinaison; elle peut être australe ou boréale, suivant que l'astre est dans l'hémisphère austral ou boréal.

L'ascension droite est la distance du point équinoxial du printemps au cercle de déclinaison, comptée sur l'équateur de l'ouest à l'est. On voit donc que la position d'un astre est connue quand on a son ascension droite et sa déclinaison.

On détermine aussi la position des astres par rapport à l'écliptique, et pour cet effet l'on imagine des grands cercles passant par les pôles de cet orbe solaire; on les nomme *cercles de latitude*, parceque c'est sur eux que l'on estime la distance des astres à l'écliptique. La latitude est australe ou boréale, suivant que l'astre est entre le pôle austral et l'écliptique, ou entre ce cercle et le pôle boréal.

Les cercles de longitude sont des petits cercles de la sphère

céleste parallèles à l'écliptique; mais l'on est dans l'usage de prendre pour la longitude d'un astre l'arc de l'écliptique compris entre le point de l'équinoxe du printemps et le cercle de latitude. Ainsi l'on connaît encore le lieu d'un astre par le moyen de sa latitude et de sa longitude qui se compte, comme l'ascension droite, d'occident en orient.

La hauteur d'un astre est l'arc de grand cercle compris entre l'horizon et cet astre, et dont le plan passe par le zénith de l'observateur. L'angle que ce cercle de hauteur ou *vertical* fait avec le méridien, est dit *l'azimuth* de l'astre. Le grand cercle qui passe par les points est ou ouest se nomme *premier vertical*; celui-ci est donc perpendiculaire au méridien du lieu.

CHAPITRE

CHAPITRE IV.

Du mouvement de la terre autour du soleil, et des latitudes et longitudes géographiques.

8. Dans tout ce qui précède sur le système du monde, le soleil est supposé en mouvement autour de la terre; mais il est très-probable que ce mouvement n'est qu'apparent et n'est dû qu'à une illusion d'optique semblable à celle qu'éprouve un voyageur, lorsqu'entraîné par le courant d'un fleuve, il fixe les rivages et leur attribue un mouvement contraire à celui par lequel il est emporté réellement. En effet, l'hypothèse la plus conforme aux observations, est d'admettre que la terre tourne sùr elle-même en 24 heures, et autour du soleil dans l'espace d'un an, en décrivant un orbe dont le centre du soleil occupe un des foyers; mais dans l'une comme dans l'autre supposition, les apparences des mouvemens des corps célestes sont les mêmes.

La terre, en décrivant son orbe ou l'écliptique, est accompagnée de la lune, qui, par son mouvement propre d'occident en orient, décrit elle-même une ellipse à l'un des foyers de laquelle est placé le centre de la terre. L'orbe lunaire étant incliné sur l'écliptique, de 5° environ, rencontre cette courbe en deux points opposés, qu'on appelle *nœuds de la lune*. Ce satellite présente perpétuellement plusieurs phénomènes très-remarquables; sur lesquels néanmoins nous garderons le silence, parceque le petit nombre des méthodes astronomiques que nous exposerons par la suite n'en exige pas la connaissance.

9. En considérant toujours la terre comme une sphère, tous les points de sa surface, dans leur mouvement diurne autour de l'axe du monde, décrivent des cercles parallèles entr'eux et qui,

comme dans la sphère céleste, sont nommés *parallèles*, lorsqu'ils sont inégalement éloignés des pôles. *L'équateur terrestre* est donc le cercle dont le plan coïncide avec celui de l'équateur céleste, et partage la surface du globe en deux hémisphères. Le *méridien d'un lieu* est de même le cercle qui passe par ce lieu et par les pôles de la terre. Le *premier méridien* est celui auquel on est convenu de rapporter tous les autres.

L'angle que forment deux méridiens est mesuré par l'arc de l'équateur qu'ils interceptent. Cet arc se nomme *longitude terrestre*, ou *différence des longitudes*, en tant que l'un des méridiens est ou n'est pas considéré comme le premier. La longitude se compte sur l'équateur, de part et d'autre du méridien, et peut être parconséquent orientale ou occidentale : elle se compte aussi dans le sens du mouvement de la terre, c'est-à-dire d'occident en orient, et depuis 0° jusqu'à 360°; cela est indifférent, pourvu qu'on avertisse.

Il suit de là et de ce qui a été dit plus haut, que lorsqu'il est midi vrai au méridien de Paris, par exemple, il n'est que 11 heures, temps vrai, au méridien d'un autre lieu dont la longitude occidentale, par rapport à cette ville, est de 15°.

Sur la terre sphérique, la plus courte distance de deux points est déterminée par l'arc de grand cercle qui passe par ces deux points, et la distance d'un lieu à l'équateur est l'arc du méridien de ce lieu intercepté entre son parallèle et la ligne équinoxiale (*). C'est cette dernière distance que l'on nomme *latitude géographique :* il est nécessaire d'indiquer si elle est australe ou boréale.

La latitude d'un lieu est égale à la hauteur du pôle sur l'horizon du même lieu; car la latitude et la hauteur du pôle ont l'un et l'autre pour complément au quart du méridien, la distance de ce lieu au pôle élevé.

(*) Il ne faut pas confondre la ligne équinoxiale avec la ligne des équinoxes. La première est l'équateur lui-même, et la seconde est la droite qui joint les points équinoxiaux.

10. De même qu'un point est donné sur un plan par ses distances à deux droites fixes, de même aussi la position d'un lieu sur la terre est déterminée par sa longitude et par sa latitude. Nous ferons bientôt connaître les moyens que les géomètres ont imaginés pour déterminer exactement les situations respectives des objets peu éloignés les uns des autres, et pour conclure même les dimensions du sphéroïde terrestre. C'est dans la vue de rendre plus lucide tout ce que nous dirons à ce sujet, que nous avons jugé à propos de donner une notion de la sphère ; mais l'*Exposition du Système du monde* et *la Mécanique Céleste* sont parmi les ouvrages les plus précieux en ce genre ceux qu'il faut méditer, lorsqu'on veut approfondir toutes les théories qui constituent la science de l'astronomie. Biot a publié aussi tout récemment un *Traité élémentaire d'Astronomie physique*, qui peut être considéré comme une introduction au grand ouvrage de Laplace.

LIVRE II.

EXPOSITION SOMMAIRE DES DEUX TRIGONOMÉTRIES.

CHAPITRE PREMIER.

De la Trigonométrie rectiligne.

11. MON intention n'a pas été d'écrire un Traité complet de Trigonométrie, parcequ'il ne nous reste rien à desirér à ce sujet; mais j'ai cru utile de rappeler les principes généraux de la résolution des triangles, qui servent de fondement à cet ouvrage, et de donner au moins succinctement les démonstrations des formules que j'aurai occasion d'employer par la suite.

Je vais d'abord reprendre les trois équations fondamentales qui établissent les relations entre les côtés et les angles d'un triangle rectiligne. Ces trois équations sont

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{array}\right\} \quad (A)$$

en désignant par a, b, c les trois côtés d'un triangle rectiligne quelconque, par A, B, C les angles qui sont opposés à ces côtés, et en faisant le rayon des tables $= 1$ (*).

(*) On suppose que l'on soit parvenu aux relations dont il s'agit, par une

Si l'on ajoute ensemble la première et la seconde de ces équations, puis la première et la troisième, puis la seconde et la troisième, ces trois sommes seront respectivement divisibles par $2c$ $2b$, $2a$, et l'on aura pour quotiens les équations très-simples du premier degré.

$$\left.\begin{array}{r} c - b\cos A - a\cos B = 0 \\ b - c\cos A - a\cos C = 0 \\ a - c\cos B - a\cos C = 0 \end{array}\right\} \quad (B).$$

Il est évident que les trois parties d'un triangle étant données, on peut en général déterminer les trois autres; puisqu'entre celles-ci il existe un pareil nombre d'équations. Cependant s'il s'agissait de trouver les trois côtés d'un triangle rectiligne par la connaissance de ses angles, le résultat de l'élimination, d'accord avec les considérations géométriques, apprendrait alors que le problème est indéterminé; et cette indétermination résulte de ce que les équations (B) sont sans termes tout connus.

12. Lorsque le triangle proposé est rectangle, ces équations deviennent elles-mêmes plus simples. En effet, si $A = 1^q$, q désignant le *quadrans*, on aura $\cos A = 0$, et partant

$$\left.\begin{array}{r} c - a\cos B = 0 \\ b - a\cos C = 0 \\ a - c\cos B - b\cos C = 0 \end{array}\right\}. \quad (C)$$

Or, à cause que, dans cette circonstance, $\cos B = \sin C$, et réciproquement $\cos C = \sin B$, la première équation se change en celle-ci :

$$c - a\sin C = 0;$$

d'où

$$\sin C = \frac{c}{a}.$$

Par la même raison, la seconde équation devient

méthode indépendante de la résolution du triangle rectangle : consultez à cet égard l'application de l'Algèbre à la Géométrie de Lacroix (n° 95, 3e édition).

$$b - a \sin B = 0$$

et donne

$$\sin B = \frac{b}{a}.$$

Il suit de là que, *dans un triangle rectangle, le sinus d'un des angles aigus est égal au côté opposé à cet angle, divisé par l'hypothénuse.*

13. Puisque d'une part $\sin B = \frac{b}{a}$, et de l'autre $\cos B = \frac{c}{a}$, on aura, en divisant la première expression par la seconde,

$$\frac{\sin B}{\cos B} = \operatorname{tang} B = \frac{b}{c};$$

il résultera de même

$$\frac{\sin C}{\cos C} = \operatorname{tang} C = \frac{c}{b};$$

ainsi *la tangente d'un des angles aigus d'un triangle rectangle est égale au côté opposé à cet angle, divisé par l'autre côté de l'angle droit.*

14. De la première des équations (C) l'on a immédiatement

$$a = \frac{c}{\cos B};$$

et de la seconde équation l'on tire

$$a = \frac{b}{\cos C}.$$

Ces deux expressions d'une même quantité conduisent à l'équation

$$\frac{b}{c} = \frac{\cos C}{\cos B} = \frac{\sin B}{\sin C};$$

d'où l'on déduit la proportion

$$\sin B : \sin C :: b : c;$$

donc, *dans tout triangle rectangle les sinus des angles aigus sont proportionnels aux côtés opposés à ces angles.*

Quant à la dernière des équations (C), elle devient en y substituant pour $\cos B$ et $\cos C$ leurs valeurs tirées des deux autres,

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Nous voilà donc retombés sur l'expression du quarré de l'hypothénuse; et c'est là le principe sur lequel est établie la démonstration des équations (A).

15. Pour trouver maintenant les formules qui conviennent aux différens cas des triangles obliquangles, on tirera de la première équation (A)

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

et substituant cette valeur dans l'équation $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$, il viendra, après avoir fait les opérations convenables,

$$\sin^2 A = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2c^2};$$

d'où l'on tire

$$\sin A = \frac{\sqrt{(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}}{2bc}.$$

Multipliant le second membre haut et bas par a, on aura

$$\sin A = a \times \frac{\sqrt{(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}}{2abc} \; (*),$$

et désignant par M toute la fraction qui multiplie a, on aura

$$\sin A = aM.$$

Or, comme la quantité M est une fonction symétrique des trois côtés du triangle, on en conclura pareillement

$$\sin B = bM; \quad \sin C = cM;$$

(*) Si l'on jette un coup-d'œil sur la solution du problème du n° 24 de mon *Recueil de Propositions de Géométrie*, on se convaincra que cette quantité radicale est l'expression du quadruple de l'aire du rectangle de même base et de même hauteur que le triangle proposé.

donc

$$b\sin A = a\sin B,$$

ou

$$\sin A : \sin B :: a : b;$$

donc, *dans tout triangle, les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés.*

16. Puisque $a\sin B = b\sin A$, et $c\sin B = b\sin C$, l'on aura en ajoutant et en soustrayant ces égalités membre à membre,

$$(a+c)\sin b = b(\sin A + \sin C)$$
$$(a-c)\sin b = b(\sin A - \sin C);$$

d'où l'on tire, en divisant le premier résultat par le second;

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\sin A + \sin C}{\sin A - \sin C}.$$

Mais l'on sait par la théorie des fonctions circulaires, que

$$\frac{\sin A + \sin C}{\sin A - \sin C} = \frac{\text{tang}\left(\frac{A+C}{2}\right)}{\text{tang}\left(\frac{A-C}{2}\right)};$$

ainsi

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\text{tang}\left(\frac{A+C}{2}\right)}{\text{tang}\left(\frac{A-C}{2}\right)},$$

ou

$$a+c : a-c :: \text{tang}\tfrac{1}{2}(A+C) : \text{tang}\tfrac{1}{2}(A-C)\ (*):$$

de là on tire

$$\text{tang}\left(\frac{A-C}{2}\right) = \left(\frac{a-c}{a+c}\right)\text{tang}\left(\frac{A+C}{2}\right) = \left(\frac{a-c}{a+c}\right)\cot\tfrac{1}{2}B.$$

(*) Il est à propos de remarquer que l'on obtiendrait plus promptement ce résultat, si l'on voulait recourir aux propriétés des proportions. En effet à cause de $\sin A : \sin C :: a : c$, on a sur-le-champ

$$\sin A + \sin C : \sin A - \sin C :: a+c : a-c;$$

mais nous avons préféré une voie plus analytique.

Cette

Cette formule se rapporte au cas où l'on connaît deux côtés a, c et l'angle compris B, c'est-à-dire, qu'elle donne le moyen de trouver la demi-différence des deux angles inconnus A, C; or on a d'avance leur demi-somme, puisque $\frac{A+C}{2} = 1^q - \frac{B}{2}$; donc on a tout ce qu'il faut pour connaître ces angles.

Si les deux côtés a, c sont connus par leurs logarithmes, ainsi qu'il arrive fréquemment dans les opérations géodésiques, on pourra se dispenser de chercher les deux nombres correspondans pour calculer la formule précédente, et voici alors comment il faudra opérer.

On considérera a, c comme les côtés d'un triangle rectangle, et en désignant par φ l'angle opposé au côté a, on aura

$$\tang \varphi = \frac{a}{c}.$$

Cet angle sera plus grand qu'un demi-quadrans, puisque l'on suppose $a > b$; donc à cause de $\tang\left(\varphi - \frac{1^q}{2}\right) = \frac{\tang\varphi - \tang\frac{1^q}{2}}{1 + \tang\varphi\tang\frac{1^q}{2}}$, et de $\tang\frac{1^q}{2} = 1$, on aura

$$\tang\left(\varphi - \frac{1^q}{2}\right) = \frac{a-c}{a+c};$$

mais d'après ce qui précède,

$$\frac{a-c}{a+c} = \frac{\tang\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\cot\frac{1}{2}B};$$

donc

$$\tang\left(\frac{A-C}{2}\right) = \cot\frac{1}{2}B\tang\left(\varphi - \frac{1^q}{2}\right),$$

formule qui donnera, comme ci-dessus la valeur de $\frac{A-C}{2}$.

17. Maintenant si dans l'équation

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

on met au lieu de $\cos A$ sa valeur $1-2\sin^2\frac{1}{2}A$, on aura en changeant les signes de tous les termes, et en laissant seulement $\sin^2\frac{1}{2}A$ dans le premier membre,

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A=\frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{4bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}.$$

Le numérateur du second membre étant le produit des deux facteurs $(a+b-c)(a-b+c)$, on donnera à cette équation la forme

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A=\frac{\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)}{4bc};$$

mais comme $\frac{a+c-b}{2}=\frac{a+b+c}{2}-b$, et que $\frac{a+b-c}{2}=\frac{a+b+c}{2}-c$, si l'on désigne $a+b+c$ par s, on aura après avoir extrait la racine quarrée,

$$\sin\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\left(\frac{s}{2}-b\right)\left(\frac{s}{2}-c\right)}{bc}},$$

formule qui peut être calculée facilement par les logarithmes, et qui donne très-promptement un angle du triangle dont on connaît les trois côtés.

CHAPITRE II.

De la Trigonométrie sphérique.

18. Les principes pour la résolution des triangles sphériques dérivent naturellement des équations (A) relatives aux triangles rectilignes.

Soient AD la tangente et OD la sécante de l'arc AB. FIG. 1.

Soient de même AE la tangente et OE la sécante de l'arc AC.

Si l'on désigne comme à l'ordinaire par A, B, C les angles, et par a, b, c les côtés opposés du triangle sphérique ABC construit sur la surface d'une sphère dont le centre est en O; le triangle rectiligne ADE donnera, en faisant $DE = x$,

$$x^2 = \text{tang}^2 b + \text{tang}^2 c - 2 \text{tang}\, b \,\text{tang}\, c \cos A;$$

le triangle ODE donnera de même

$$x^2 = \sec^2 b + \sec^2 c - 2 \sec b \sec c \cos a;$$

soustrayant de cette équation la première, et faisant attention que $\sec^2 b - \text{tang}^2 b = 1$, on aura, réduction faite,

$$1 + \frac{\sin b \sin c}{\cos b \cos c} \cos A - \frac{\cos a}{\cos b \cos c} = 0,$$

et parconséquent

$$\left.\begin{array}{l} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{array}\right\} . \quad (\alpha)$$

La combinaison de ces trois équations donne la résolution

de tous les cas possibles des triangles sphériques, et nous verrons bientôt comment elle doit s'effectuer, afin d'obtenir des résultats commodes pour le calcul logarithmique.

19. Si de la première des équations (α) on tire la valeur de $\cos A$, et qu'on l'introduise dans l'équation $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$, on aura

$$\sin^2 A = 1 - \frac{\cos^2 a + \cos^2 b \cos^2 c - 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c};$$

réduisant les termes du second membre au même dénominateur, multipliant haut et bas par $\sin^2 a$, et extrayant la racine, on obtiendra

$$\sin A = \sin a \times \frac{\sqrt{(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c)}}{\sin a \sin b \sin c};$$

désignant par M toute la fraction qui multiplie $\sin a$, on pourra écrire plus simplement,

$$\sin A = M \sin a.$$

Un calcul semblable pour les deux dernières équations (α) conduirait de même à

$$\sin B = M \sin b$$
$$\sin C = M \sin c.$$

Il suit de là que *les sinus des angles d'un triangle sphérique sont proportionnels aux sinus des côtés qui leur sont opposés.*

20. L'hypothèse $A = 1^q$ réduit la première équation (α) ainsi qu'il suit :

$$\cos a = \cos b \cos c;$$

donc, *dans tout triangle sphérique rectangle, le cosinus de l'hypothénuse est égal au produit des cosinus des côtés qui comprennent l'angle droit.*

21. Maintenant si l'on met pour $\cos a$ sa valeur précédente dans la seconde des éqnations citées, et $\tang a \cos b \cos c$ pour $\sin a$ (quantité résultante de $\cos a = \cos b \cos c$ multipliée par $\tang a$), on anra, à cause de $1 - \cos^2 c = \sin^2 c$,

$$\operatorname{tang} a \cos c \cos B = \sin c\,;$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang} a \cos B = \operatorname{tang} c, \quad \text{ou} \quad \cos B = \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} a}.$$

on obtiendrait de même

$$\operatorname{tang} a \cos C = \operatorname{tang} b, \quad \text{ou} \quad \cos C = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a};$$

c'est-à-dire que *dans tout triangle sphérique rectangle, le cosinus des angles obliques est égal à la tangente du côté adjacent, divisée par la tangente de l'hypothénuse.*

22. Par l'art. 19, nous avons eu $\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin a}$; mais dans l'hypothèse que $A = 1^q$, on a simplement $\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}$.

D'un autre côté, par l'art. précédent, nous avons eu $\cos C = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}$; or si on divise l'une par l'autre ces deux dernières équations, on aura

$$\frac{\cos C}{\sin B} = \frac{\operatorname{tang} b}{\sin b} \cdot \frac{\sin a}{\operatorname{tang} a} = \frac{\cos a}{\cos b}.$$

Enfin, en vertu de l'art. 20, $\frac{\cos a}{\cos b} = \cos c$;

donc $\frac{\cos C}{\sin B} = \cos c$, et pareillement $\frac{\cos B}{\sin C} = \cos b$.

Donc, *dans un triangle sphérique rectangle, le cosinus d'un des côtés de l'angle droit est égal au cosinus de l'angle opposé, divisé par le sinus de l'angle adjacent.*

23. Puisque $\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}$, et $\cos B = \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} a}$, on aura en divisant l'une par l'autre,

$$\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin b}{\sin a} \cdot \frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} c},$$

ou bien à cause de $\sin a = \cos a \operatorname{tang} a$, et du principe démontré dans l'art. 20, on aura

$$\tang B = \frac{\sin b}{\cos a \tang c} = \frac{\sin b}{\cos b \cos c \tang c};$$

donc

$$\tang B = \frac{\tang b}{\sin c}, \text{ et } \tang C = \frac{\tang c}{\sin b};$$

donc, *la tangente d'un angle oblique d'un triangle sphérique rectangle est égale à la tangente du côté opposé, divisée par le sinus de l'autre côté de l'angle droit.*

24. Enfin si l'on multiplie l'une par l'autre les deux équations précédentes, on obtiendra

$$\tang B \tang C = \frac{\tang b}{\sin b} \cdot \frac{\tang c}{\sin c} = \frac{1}{\cos b \cos c};$$

mais $\cos b \cos c = \cos a$;
donc

$$\tang B \tang C = \frac{1}{\cos a}, \text{ ou } \cos a = \frac{\cot C}{\tang B}:$$

ainsi *le cosinus de l'hypothénuse d'un triangle sphérique est égal à la cotangente d'un angle oblique, divisée par la tangente de l'autre angle.*

Voilà tout ce qui concerne la résolution des triangles sphériques rectangles. En ayant égard, dans les formules, aux signes qui doivent affecter les valeurs de sin, cos, tang, etc. d'un angle, on ne sera nullement embarrassé sur l'espèce de l'angle ou du côté cherché, dans tous les cas qui ne sont pas douteux de leur nature. L'équation $\cos a = \cos b \cos c$, par exemple, nous apprend que chacun des trois côtés d'un triangle sphérique rectangle est plus petit qu'un quadrans, ou que si deux côtés sont plus grands que 1^q, le troisième sera nécessairement plus petit, ou enfin que si les deux côtés de l'angle droit sont d'espèces différentes, l'hypothénuse sera $> 1^q$.

De même par l'équation $\tang B = \frac{\tang b}{\sin c}$, nous voyons qu'un angle oblique est toujours de même espèce que le côté qui lui est opposé.

25. Passons maintenant à la recherche des formules pour la résolution des triangles sphériques en général.

Des équations (α) l'on tire

$$\left.\begin{aligned}\cos A &= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}\\ \cos B &= \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}\\ \cos C &= \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}\end{aligned}\right\}. \quad (\beta)$$

L'une de ces équations fait connaître un angle d'un triangle sphérique, en fonction des trois côtés; mais l'on peut transformer ces équations de manière à ce que leurs seconds membres soient décomposés en facteurs. Pour cet effet l'on mettra dans $1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{1}{2} A$ la valeur précédente de $\cos A$, et l'on parviendra facilement à

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c}.$$

Or à cause de $\cos q - \cos p = 2 \sin \frac{1}{2}(p+q) \sin \frac{1}{2}(p-q)$, on a évidemment

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin\left(\frac{a+b-c}{2}\right) \sin\left(\frac{a+c-b}{2}\right)}{\sin b \sin c};$$

d'où l'on tire, en faisant $s = a + b + c$,

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{s}{2} - b\right) \sin\left(\frac{s}{2} - c\right)}{\sin b \sin c}};$$

équation analogue à celle de l'art. 17, et relative au triangle rectiligne.

26. Si, entre les première et troisième équations (α), l'on élimine $\cos c$, on aura

$$\cos A \sin c + \cos C \sin a \cos b = \cos a \sin b;$$

mais par l'art. 19

$$\sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A};$$

donc

$$\cot A \sin C + \cos C \cos b = \cot a \sin b;$$

d'ailleurs

$$\cot a \sin b = \cos a \frac{\sin b}{\sin a} = \cos a \frac{\sin B}{\sin A};$$

donc enfin l'équation précédente deviendra, après avoir chassé le dénominateur,

$$\cos A \sin C = \cos a \sin B - \sin A \cos C \cos b;$$

on aura pareillement

$$\cos B \sin C = \cos b \sin A - \sin B \cos C \cos a,$$

et éliminant $\cos b$ entre ces deux-ci, on parviendra à

$$\left.\begin{array}{l} \cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C; \\ \text{on aura de même} \left\{ \begin{array}{l} \cos B = \cos b \sin A \sin C - \cos A \cos C \\ \cos C = \cos c \sin A \sin B - \cos A \cos B \end{array} \right. \end{array} \right\}. \quad (\gamma)$$

Ce système d'équations est analogue à celui que nous avons désigné par (α), et il est remarquable que l'un se déduit de l'autre, en écrivant ABC au lieu de abc, et *vice versâ;* les cosinus étant toutefois affectés du signe négatif.

27. Si l'on traite les équations (γ) comme les précédentes (α), on aura pour résultat

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{-\frac{\cos\left(\frac{A+B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B+C-A}{2}\right)}{\sin B \sin C}},$$

formule qui donne un côté en fonction des trois angles.

Si la quantité qui est sous le signe radical était négative comme elle le paraît d'abord, il serait impossible de déterminer la valeur de $\sin \frac{1}{2} a$; cette valeur est cependant toujours réelle; car en général $\sin(x - 1^q) = -\cos x$; donc $\sin\left(\frac{A+B+C}{2} - 1^q\right) = -\cos\left(\frac{A+B+C}{2}\right)$, quantité qui est toujours positive, parceque $A+B+C$ étant nécessairement compris entre 2^q et 6^q, on a $\frac{A+B+C}{2} - 1^q > 0$, et $< 2^q$. D'ailleurs le côté d'un triangle sphérique étant plus petit que la somme des deux autres, on a par la propriété du *triangle polaire*,

polaire, $2^r - A < 2^r - B + 2^r - C$, d'où $\frac{B+C-A}{2} < 1^r$, dont le cosinus est positif.

28. De l'équation

$$\cos A \sin c = \cos a \sin b - \cos C \sin a \cos b$$

obtenue à l'art. 26 on conclut par une simple permutation de lettres,

$$\cos B \sin c = \cos b \sin a - \cos C \sin b \cos a\,;$$

or ajoutant ces deux équations, on a, réduction faite,

$$\sin c(\cos A + \cos B) = (1 - \cos C)\sin(a + b).$$

D'un autre côté,

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin c}{\sin C}, \text{ et } \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C},$$

chassant les dénominateurs, ajoutant et soustrayant les deux équations l'une de l'autre, on trouvera

$$\sin c(\sin A + \sin B) = \sin C(\sin a + \sin b)$$

et

$$\sin c(\sin A - \sin B) = \sin C(\sin a - \sin b);$$

divisant successivement ces deux équations par la précédente, on aura

$$\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{\sin C}{1 - \cos C}\left(\frac{\sin a + \sin b}{\sin(a + b)}\right)$$

$$\frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{\sin C}{1 - \cos C}\left(\frac{\sin a - \sin b}{\sin(a + b)}\right),$$

formules qui, en vertu des art. 26 et 28 (*Trig. de Lacroix.*), deviennent

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(A + B) = \cot\tfrac{1}{2}C \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(a - b)}{\cos\frac{1}{2}(a + b)}$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(A - B) = \cot\tfrac{1}{2}C \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(a - b)}{\sin\frac{1}{2}(a + b)},$$

et à l'aide desquelles, étant donnés deux côtés et l'angle compris, on peut trouver les deux autres angles. Malgré que ces équations soient

sous une forme très-commode pour l'emploi des logarithmes, nous aurons recours par la suite à la formule qui donne directement un des angles inconnus : cette formule est

$$\cot A = \frac{\cot a \sin b}{\sin C} - \cot C \cos b,$$

et dérive visiblement de la troisième de l'art. 26. Jusqu'à présent on n'a pu la réduire immédiatement en facteurs ; mais si l'on fait usage d'un angle subsidiaire φ, et que l'on fasse

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} a \cos C,$$

ce qui revient à diviser le triangle en deux rectangles, l'équation précédente deviendra

$$\cot A = \cot C (\cot \varphi \sin b - \cos b) = \frac{\cot C}{\sin \varphi} (\cos \varphi \sin b - \sin \varphi \cos b);$$

donc

$$\cot A = \frac{\cot C}{\sin \varphi} \cdot \sin(b - \varphi).$$

29. L'analyse qui nous a conduit aux formules ci-dessus étant appliquée aux équations (γ) nous conduirait de même aux formules suivantes :

$$\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \frac{\sin c}{1 + \cos c} \left(\frac{\sin A + \sin B}{\sin (A + B)} \right)$$

$$\frac{\sin a - \sin b}{\cos a + \cos b} = \frac{\sin c}{1 + \cos c} \left(\frac{\sin A - \sin B}{\cos (A + B)} \right).$$

Concluons de là que

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (a + b) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c \frac{\cos \frac{1}{2} (A - B)}{\cos \frac{1}{2} (A + B)}$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (a - b) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c \frac{\sin \frac{1}{2} (A - B)}{\sin \frac{1}{2} (A + B)};$$

ainsi étant donnés un côté et deux angles adjacens, on trouvera les deux autres côtés au moyen de ces deux dernières formules. Celles-ci et leurs analogues étant mises en proportion, sont connues sous le nom d'*analogies de Neper*.

On obtiendrait immédiatement l'un des côtés a, b ; le côté a,

par exemple, au moyen de la formule

$$\cot a = \frac{\cot A \sin B}{\sin c} + \cot c \cos B,$$

que l'on trouve sur-le-champ en mettant dans l'équation analogue, A, B, C au lieu de a, b, c, et en affectant les cos. et les cot. du signe négatif, comme nous l'avons déjà observé.

Pour la réduire en facteurs, on fera

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\cot A}{\cos c},$$

et en substituant pour cot A sa valeur $\cos c \operatorname{tang} \varphi$, on aura

$$\cot a = \frac{\cot c}{\cos \varphi} \cdot \cos(B - \varphi).$$

30. Il nous reste à faire voir comment les deux systèmes d'équations (α) et (γ) peuvent se plier aisément au calcul logarithmique, par la voie d'un angle subsidiaire.

Pour cet effet reprenons, par exemple, l'équation

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

qui donne directement le troisième côté d'un triangle dans lequel on connaît deux côtés et l'angle compris, et faisons

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} c \cos A,$$

on aura

$$\sin c \cos A = \cos c \operatorname{tang} \varphi;$$

donc

$$\cos a = \cos c (\cos b + \sin b \operatorname{tang} \varphi) = \frac{\cos c}{\cos \varphi} (\cos b \cos \varphi + \sin b \sin \varphi);$$

donc enfin

$$\cos a = \frac{\cos c}{\cos \varphi} \cdot \cos(b - \varphi).$$

C'est par un procédé pareil, que la première équation (γ) pourra être décomposée; ainsi pour trouver le troisième angle A

d'un triangle dans lequel on connaît les deux autres angles B, C, et le côté intercepté a, on aura à résoudre les deux équations

$$\cot \varphi = \text{tang}\, C \cos a$$

$$\cos A = \frac{\cos C}{\sin \varphi} \cdot \sin (B - \varphi).$$

Voilà à-peu-près les formules les plus importantes de la trigonométrie sphérique. On trouvera plus de détails dans les Traités de Trigonométrie de Lacroix et de Legendre, et dans un beau Mémoire de Lagrange, (6e nº du Journal de l'École Polytechnique).

CHAPITRE III,

Contenant des observations sur divers cas particuliers de la Trigonométrie.

51. LA résolution des triangles par les formules que nous avons données dans les deux chapitres précédens, a tout le degré de généralité que l'on peut desirer; mais il arrive quelquefois dans la pratique, que l'erreur des tables des logarithmes s'accumule sur les résultats auxquels conduisent les solutions générales. Pour obvier à cet inconvénient, nous analyserons quelques-uns des cas particuliers dont les solutions, quoiqu'approximatives, se trouvent, en grande partie, dégagées de l'erreur dont il s'agit.

Nous emploierons les séries suivantes, qui sont assez connues pour que nous soyons dispensé d'en rappeler les démonstrations.

$$\left.\begin{array}{l} \sin x = x - \frac{x}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots \\ \operatorname{tang} x = x + \frac{x^3}{1.3} + \frac{2x^5}{1.3.5} + \ldots \end{array}\right\}$$

Nous aurons aussi occasion de convertir en parties du quadrans, ou en grades, un arc donné en parties du rayon pris pour unité. Cette opération est fondée sur la considération suivante :

Si l'on suppose que le rayon soit développé sur la circonférence, il interceptera un nombre de parties du quadrans, que l'on obtiendra à l'aide de la proportion

$$\pi : 1 :: 2^q : R = \frac{2^q}{\pi},$$

π désignant la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon $=1$, q le quadrans et R un arc égal au rayon.

Dans la pratique, 1^q dépend du système de division que l'on adopte; ainsi, dans l'hypothèse que $1^q = 100$ grades ou degrés décimaux, le rayon sera exprimé en centigrades ou minutes décimales, par

$$R' = \frac{20000}{\pi} = 6366'.1977237,$$

dont le logarithme $= 3.80388012297$; à cause de $\pi = 3.141592$, et de $2^q = 20000'$.

De même le rayon sera exprimé en milligrades ou secondes décimales, par

$$R'' = \frac{2000000}{\pi} = 636619''.77237,$$

dont le logarithme est 5.8038801.

Ainsi un arc quelconque, donné en parties du rayon considéré comme unité, sera exprimé en secondes, par exemple, en le multipliant par R''; et un arc donné en secondes sera converti en parties du rayon, en le divisant par R''.

Si l'on employait l'ancienne division du cercle, on aurait

$$R'' = 206264''.8,$$
$$\text{et log. } R'' = 5.3144251.$$

Il est remarquable que $R'' = \frac{1}{\sin 1''}$, du moins à très-peu-près. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que le sinus de $1''$, vu sa petitesse, pouvant être pris pour l'arc même, on a sensiblement $\frac{1}{\sin 1''} = \frac{1}{\text{arc } 1''}$; mais $\frac{1}{\text{arc } 1''} = R''$ exactement; donc

$$R'' = \frac{1}{\sin 1''}.$$

Nous ferons, par la suite, usage de l'une et de l'autre expression du rayon réduit en secondes.

Résolution d'un triangle rectiligne dont deux côtés sont donnés avec l'angle compris, que l'on suppose très-obtus.

32. Soient a, b les côtés connus, et $C = 2^{q} - \theta$ l'angle compris, θ étant très-petit.

La formule de l'art. 11 donnera, en conservant la notation qui y est indiquée, et en faisant attention que le cosinus de C est négatif,

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta;$$

mais d'après l'art. 31,

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2};$$

donc

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = (a+b)^2 - ab\theta^2;$$

donc si l'on prend la racine quarrée en se bornant aux termes de l'ordre θ^2, on aura

$$c = (a+b) - \frac{1}{2}\frac{ab\theta^2}{(a+b)}. \qquad (1)$$

Il est remarquable que, dans cette formule, θ est introduit comme un arc donné en parties du rayon; mais dans la pratique, cet arc est donné en minutes ou secondes; et comme il doit être employé dans la première hypothèse, il faudra diviser θ par R' ou R''; l'on aura donc en général

$$c = (a+b) - \frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{a+b}\left(\frac{\theta}{R}\right)^2.$$

Maintenant, de l'équation $\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a}{c}$, ou $\frac{\sin A}{\sin\theta} = \frac{a}{c}$, on tire, en substituant la valeur de c et celle de $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{2.3}$,

$$\sin A = \frac{a}{c}\sin\theta = a\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right)c^{-1} = a\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{2}\cdot\frac{ab\theta^2}{(a+b)^3}\right);$$

d'où l'on tire

$$\sin A = \frac{a\theta}{a+b}\left(1 + \frac{ab-a^2-b^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{\theta^2}{6}\right). \qquad (2)$$

Mais l'angle C étant très-obtus, l'angle A sera fort aigu; ainsi le sinus de celui-ci peut être pris pour son arc, *et vice versâ*. Or on a $\sin A = A - \frac{A^3}{6}$, donc $A = \sin A + \frac{\sin^3 A}{6}$. Substituant pour $\sin A$, et $\sin A^3$ leurs valeurs déduites de l'équation (2), on aura, en se bornant toujours aux termes de l'ordre θ^3,

$$A = \sin A + \frac{\sin^3 A}{6} = \frac{a\theta}{a+b}\left(1 + \frac{b(a-b)}{(a+b)^2}\cdot\frac{\theta^2}{6}\right).$$

Il faut, dans cette formule, comme dans la valeur précédente de c, et pour la même raison, écrire $\frac{\theta}{R}$ au lieu de θ; mais la valeur actuelle de A serait donnée en parties du rayon; donc pour l'avoir en minutes ou en secondes, il faudra la multiplier par R, ce qui revient à

$$A = \frac{a\theta}{a+b}\left[1 + \frac{b(a-b)}{6(a+b)^2}\cdot\left(\frac{\theta}{R}\right)^2\right].$$

33. On a quelquefois besoin de la valeur en série de l'un des angles inconnus, de B, par exemple. Or la formule $\frac{a}{b} = \frac{\sin(B+C}{\sin B}$ devient, en développant $\sin(B+C)$,

$$a\sin B = b(\sin B\cos C + \cos B\sin C),$$

et parconséquent

$$\frac{\sin B}{\cos C} = \frac{b\sin C}{a - b\cos C};$$

mais en général

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \quad \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2};$$

e étant la base des logarithmes népériens, ou le nombre dont le logarithme hyperbolique est $= 1$.

Donc

Donc l'équation précédente deviendra

$$\frac{e^{B\sqrt{-1}}-e^{-B\sqrt{-1}}}{e^{B\sqrt{-1}}+e^{-B\sqrt{-1}}}=\frac{b(e^{C\sqrt{-1}}-e^{-C\sqrt{-1}})}{2a-b(e^{C\sqrt{-1}}+e^{-C\sqrt{-1}})}. \quad (3)$$

Celle-ci peut être mise sous une forme plus simple et plus symétrique, d'abord en divisant le premier membre haut et bas par $e^{-B\sqrt{-1}}$, on aura pour quotient

$$\frac{e^{2B\sqrt{-1}}-1}{e^{2B\sqrt{-1}}+1},$$

et le second membre pourra être écrit ainsi

$$\frac{be^{C\sqrt{-1}}-be^{-C\sqrt{-1}}}{a-be^{-C\sqrt{-1}}+a-be^{C\sqrt{-1}}}.$$

L'équation (3) est donc de la forme

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\gamma+\delta};$$

or si dans cette dernière on chasse les dénominateurs, et que l'on réduise, on trouvera

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta};$$

donc en remplaçant α, β, γ, δ par leurs valeurs correspondantes, on aura

$$e^{2B\sqrt{-1}}=\frac{a-be^{-C\sqrt{-1}}}{a-be^{C\sqrt{-1}}}=\frac{N}{D},$$

ou prenant les logarithmes népériens de chaque membre,

$$2B\sqrt{-1}-L(N)-L(D).$$

Développant le second membre d'après la formule connue

$L(a-x)=La-\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}-\frac{x^3}{3a^3}-$ etc....., on aura

$$2B\sqrt{-1}=\frac{b}{a}e^{C\sqrt{-1}}+\frac{b^2}{2a^2}e^{2C\sqrt{-1}}+\frac{b^3}{3a^3}e^{3C\sqrt{-1}}+\ldots$$
$$-\frac{b}{a}e^{-C\sqrt{-1}}-\frac{b^2}{2a^2}e^{-2C\sqrt{-1}}-\frac{b^3}{3a^3}e^{-3C\sqrt{-1}}-\ldots$$

donc en divisant tout par $2\sqrt{-1}$, et réduisant au moyen de la formule

$$\frac{e^{mC\sqrt{-1}}-e^{-mC\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}=\sin.mC,$$

on aura pour la valeur de l'angle B, exprimée en parties du rayon,

$$B=\frac{b}{a}\sin C+\frac{b^2}{2a^2}\sin 2C+\frac{b^3}{3a^3}\sin 3C+\ldots\ldots$$

Cette série élégante, à laquelle Delambre est parvenu le premier, est évidemment d'autant plus convergente, que b est plus petit à l'égard de a.

On peut voir dans la Trigonométrie de Legendre, page 412, comment cet illustre géomètre obtient le logarithme de c en série ordonnée suivant les cosinus des multiples de l'angle opposé.

Étant connus l'hypothénuse d'un triangle sphérique rectangle, et un des angles obliques, trouver la valeur du côté adjacent à cet angle, exprimée en série.

34. L'équation qui donne le côté de l'angle droit c en fonction de l'hypothénuse a et de l'angle compris B est, d'après l'art. 21,

$$\tang c=\tang a\cos B.$$

Or si l'on change les tangentes en valeurs exponentielles imaginaires, on aura

$$\frac{e^{2c\sqrt{-1}}-1}{e^{2c\sqrt{-1}}+1}=\cos B\frac{e^{2a\sqrt{-1}}-1}{e^{2a\sqrt{-1}}+1}.$$

Soient $m=e^{2c\sqrt{-1}}$, $n=e^{2a\sqrt{-1}}$, l'équation précédente prendra la forme

$$\frac{m-1}{m+1}=\cos B\,\frac{n-1}{n+1};$$

Chassant les dénominateurs et décomposant en facteurs, on aura

$$m\{n(1-\cos B)+(1+\cos B)\}=n(1+\cos B)+(1-\cos B);$$

d'où

$$\frac{n}{m}=\frac{(1+\cos B)+n(1-\cos B)}{(1+\cos B)+n^{-1}(1-\cos B)}.$$

Divisant le second membre haut et bas par $1+\cos B$, et substituant pour $\frac{1-\cos B}{1+\cos B}$ sa valeur $\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}B$, on trouvera

$$\frac{n}{m}=\frac{1+n\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}B}{1+n^{-1}\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}B};$$

et parconséquent en éliminant m et n, on aura

$$e^{2(a-c)\sqrt{-1}}=\frac{1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}Be^{2a\sqrt{-1}}}{1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}Be^{-2a\sqrt{-1}}}.$$

Maintenant si, comme dans l'art. précédent, on prend de part et d'autre les logarithmes népériens, et que l'on développe en vertu de la formule $L(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots.$, il viendra

$$\begin{aligned}2(a-c)\sqrt{-1}=&\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}Be^{2a\sqrt{-1}}-\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}Be^{4a\sqrt{-1}}+\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^6\tfrac{1}{2}Be^{6a\sqrt{-1}}-\ldots..\\&-\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}Be^{-2a\sqrt{-1}}+\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}B^{-4a\sqrt{-1}}-\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^6.\tfrac{1}{2}Be^{-6a\sqrt{-1}}+\ldots..\end{aligned}$$

et enfin

$$a-c=\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}B\sin 2a-\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}B\sin 4a+\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^6.\tfrac{1}{2}B\sin 6a-\ldots...$$

C'est par un procédé à-peu-près semblable, que Lagrange a obtenu cette série. (Mém. de l'Académie de Berlin, année 1776).

Résolution d'un triangle sphérique dont deux côtés sont peu différens du quadrans.

35. Soient a et b les deux côtés donnés, supposés très-peu différens du quart de la circonférence; on propose de trouver C en fonction des trois côtés a, b, c.

Par hypothèse

$$a = 1^q - \alpha$$
$$b = 1^q - \beta,$$

et comme α et β sont très-petits, l'angle C a pour mesure un arc très-peu différent de c. Soit alors

$$C = c + x,$$

on aura

$$\sin\tfrac{1}{2} C = \sin\tfrac{1}{2}(c+x) = \sin\tfrac{1}{2} c + \tfrac{1}{2} x \cos\tfrac{1}{2} c;$$

puisque x est fort petit, et par suite,

$$\sin^2\tfrac{1}{2} C = \sin^2\tfrac{1}{2} c + x \sin\tfrac{1}{2} c \cos\tfrac{1}{2} c.$$

L'équation exacte

$$\sin^2\tfrac{1}{2} C = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin a \sin b}$$

obtenue dans l'art. 25 résout la question proposée; mais vu qu'il serait pénible d'avoir C avec une grande exactitude, il vaut mieux calculer le petit excès x de l'angle C sur c. Pour cet effet, on mettra dans l'équation précédente pour a, b et $\sin^2\frac{1}{2} C$ leurs valeurs actuelles, et l'on aura

$$\sin^2\tfrac{1}{2} c + x \sin\tfrac{1}{2} c \cos\tfrac{1}{2} c = \frac{\sin^2\frac{1}{2} c \cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta) - \cos^2\frac{1}{2} c \sin^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha \cos\beta}:$$

changeant ensuite les cosinus en sinus dans le numérateur du second membre, et prenant la valeur de $x \sin\frac{1}{2} c \cos\frac{1}{2} c$, on aura, toute réduction faite,

$$x \sin\tfrac{1}{2} c \cos\tfrac{1}{2} c = \frac{(1-\cos\alpha\cos\beta)\sin^2\frac{1}{2} c - \sin^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha \cos\beta}:$$

or

$$1 - \cos\alpha\cos\beta = \sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) + \sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) \text{ et } \operatorname{tang}\tfrac{1}{2} c - \frac{1}{\sin\frac{1}{2} c \cos\frac{1}{2} c} = -\cot\tfrac{1}{2} c;$$

donc

$$x = \frac{\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\operatorname{tang}\frac{1}{2} c - \sin^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cot\frac{1}{2} c}{\cos\alpha \cos\beta}. \quad (1)$$

Telle est la formule à laquelle Delambre est parvenu par une

voie un peu différente : en prenant les petits arcs pour les sinus, elle rentre dans celle que Legendre a donnée ; c'est-à-dire, que l'on a, d'après cette hypothèse,

$$x = \tfrac{1}{4}(\alpha+\beta)^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c - \tfrac{1}{4}(\alpha-\beta)^2 \cot \tfrac{1}{2} c. \qquad (2)$$

Dans la pratique, $\alpha+\beta$ et $\alpha-\beta$ sont données en minutes ou secondes, tandis que ces quantités doivent être considérées dans cette formule comme des arcs comparés au rayon pris pour unité : mais si l'on y met $\frac{\alpha+\beta}{R}$ et $\frac{\alpha-\beta}{R}$, à la place de $\alpha+\beta$ et de $\alpha-\beta$, la correction x fera elle-même partie de ce rayon, et en la multipliant ensuite par R'' elle sera exprimée en secondes; l'on aura donc en général, mais d'une manière un peu moins exacte,

$$x = \tfrac{1}{4}\frac{(\alpha+\beta)^2}{R} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c - \tfrac{1}{4}\frac{(\alpha-\beta)^2}{R} \cot \tfrac{1}{2} c.$$

Il est évident que l'on obtiendra de même x en secondes, en multipliant par R'', ou $\frac{1}{\sin 1''}$, le second membre de la formule (1).

Si l'on veut maintenant c en fonction de C, on remarquera que puisque ces deux quantités diffèrent très-peu l'une de l'autre, on peut écrire C au lieu de c dans la valeur précédente de x; ainsi, d'une part, on a

$$c = C - x,$$

et de l'autre, si l'on fait $-x = y$, la correction cherchée sera

$$y = -\tfrac{1}{4}(\alpha+\beta)^2 \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} C}{R''} + \tfrac{1}{4}(\alpha-\beta)^2 \frac{\cot \frac{1}{2} C}{R''}.$$

Résolution d'un triangle sphérique rectangle, dont un côté de l'angle droit est fort petit à l'égard des deux autres.

36. Le calcul des latitudes, longitudes et azimuths, en considérant la terre comme un sphéroïde de révolution, dérive, ainsi qu'on le verra par la suite, de la résolution complète d'un triangle sphérique rectangle dont un côté de l'angle droit est fort petit

à l'égard des deux autres. Il est donc essentiel de s'occuper préalablement de cette résolution : pour cet effet nous dénoterons, comme à l'ordinaire, par A, B, C les angles, et par a, b, c les côtés opposés d'un triangle sphérique quelconque.

Si A est l'angle droit, et b le côté adjacent supposé très-petit, à l'égard du rayon de la sphère sur la surface de laquelle est tracé le triangle ABC, on aura, par les principes connus de la résolution exacte des triangles sphériques rectangles,

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c \\ \operatorname{tang} B &= \frac{\operatorname{tang} b}{\sin c} \\ \operatorname{tang} C &= \frac{\operatorname{tang} c}{\sin b} \end{aligned}\right\}. \quad (B)$$

Il suit de l'hypothèse énoncée ci-dessus, que les arcs a, c diffèrent très-peu l'un de l'autre. Soit alors $a = c + x$; la substitution de cette valeur dans la première des équations précédentes donnera

$$\cos(c + x) = \cos . b \cos c.$$

Développant le premier membre, il viendra

$$\cos c \cos x - \sin c \sin x = \cos b \cos c;$$

mais x étant fort petit, on a, en ne prenant que les premiers termes des séries (A), $\sin x = x$, $\cos x = 1$; donc

$$\cos c - x \sin c = \cos b \cos c;$$

et parceque b, qui est lui-même fort petit, a pour cosinus $1 - \frac{b^2}{2} + \ldots$

Il s'ensuit que

$$\cos c - x \sin c = \cos c \left(1 - \frac{b^2}{2}\right);$$

donc

$$x = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{\cos c}{\sin c} = \tfrac{1}{2} b^2 \cot c;$$

ou pour avoir x en secondes,

$$x = \tfrac{1}{2} R''b^2 \cot c;$$

donc enfin

$$a = c + \tfrac{1}{2} R''b^2 \cot c. \qquad (1)$$

Telle est la valeur de l'hypothénuse en fonction des deux autres côtés. Si au contraire on voulait c en fonction de a et b, on y parviendrait par un procédé semblable au précédent. En effet, soit $c = a + x'$, on aura

$$\cos a = \cos b \cos.(a + x');$$

développant, il viendra

$$\cos a = \cos b\,(\cos a - x' \sin a),$$

ou bien

$$\cot a = \cos b\,(\cot a - x') = \left(1 - \frac{b^2}{2}\right)(\cot a - x');$$

d'où l'on tire, en négligeant les puissances quatrièmes de b,

$$x' = -\frac{b^2}{2} \cot a \left(1 - \frac{b^2}{2}\right)^{-1} = -\tfrac{1}{2} b^2 \cot a;$$

donc

$$c = a - \tfrac{1}{2} R''b^2 \cot a. \qquad (2)$$

37. Passons maintenant au développement de la seconde équation (B), laquelle devient, au moyen des valeurs de tang B et de tang b,

$$B = \frac{b}{\sin c}\left(1 + \frac{b^2}{3}\right) - \frac{B^3}{3}.$$

L'angle B et le côté qui lui est opposé étant fort petits, on aura sensiblement $B = \frac{b}{\sin c}$ et $B^3 = \frac{b^3}{\sin^3 c}$; donc l'équation précédente prendra la forme

$$B = \frac{b}{\sin c}\left(1 + \frac{b^2(\sin^2 c - 1)}{3 \sin^2 c}\right);$$

d'où l'on conclut

$$B = \frac{R''b}{\sin c} - \frac{R''b^3 \cos^2 c}{3 \sin^3 c}. \qquad (3)$$

38. Il ne nous reste plus qu'à traiter la troisième équation (B).

Or si l'on y fait $C = 1' - y$, y étant supposé très-petit, elle deviendra

$$\text{tang}(1' - y) = \cot y = \frac{\text{tang}\, c}{\sin b};$$

d'où

$$\text{tang}\, y = \cot c \sin b.$$

Mettant pour $\text{tang}\, y$ et $\sin b$ leurs valeurs déduites des séries (A), art. 31, on aura

$$y + \frac{y^3}{3} = b \cot c - \frac{b^3}{6} \cot c.$$

On voit d'abord, par cette équation, que l'on a à-peu-près $y = b \cot c$, ou $\frac{y^3}{3} = \frac{b^3}{3} \cot^3 . c$; ainsi cette même équation prendra la forme

$$y = b \cot c - \frac{b^3}{3} \cot c \left(\tfrac{1}{2} + \cot^2 c\right);$$

on aura donc

$$C = 1' - R'' b \cot c + R'' \frac{b^3}{3} \cot c \left(\tfrac{1}{2} + \cot^2 c\right). \quad (4)$$

Cette valeur est celle de l'angle C donné en fonction des deux côtés de l'angle droit. Cherchons à présent la relation qui existe entre C, a, b.

D'abord, par la solution précédente, on a $c = a - \frac{1}{2} b^2 \cot a$; ainsi

$$C = 1' - b \cot\left(a - \tfrac{1}{2} b^2 \cot a\right)$$
$$+ \frac{b^3}{3} \cot\left(a - \tfrac{1}{2} b^2 \cot a\right)\left[\tfrac{1}{2} + \cot^2.\left(a - \frac{b^2}{2} \cot a\right)\right].$$

Développant dans l'hypothèse que le second terme de la valeur de c est très-petit, et négligeant les puissances quatrièmes de b, on aura, à cause de

$$\cot a \,\text{tang}\, a = 1 \quad \text{et de} \quad \frac{1}{\text{tang.}} = \cot.$$

$$C = 1' - \left(b + \frac{b^3}{2}\right)\left(\cot a + \frac{b^2}{2} \cot^3 a\right) + \tfrac{1}{3} b^3 \cot a \left(\tfrac{1}{2} + \cot^2 a\right)$$

et ensuite

$$C = 1' - R'' b \cot a - \tfrac{1}{3} R'' b^3 \cot a \left(1 + \tfrac{1}{2} \cot^2 a\right). \quad (5)$$

Résolution

Résolution des triangles sphériques dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère.

39. La résolution des triangles sphériques très-peu courbes se ramène immédiatement à celle des triangles rectilignes, au moyen d'un théorême remarquable dû à Legendre, et qui est très-utile dans les opérations géodésiques. En voici l'énoncé et la démonstration.

Le triangle sphérique très-peu courbe, dont les angles sont A, B, C, *et les côtés opposés* a, b, c, *répond toujours à un triangle rectiligne qui a les côtés de même longueur, et dont les angles sont* $A-\frac{1}{3}\varepsilon$, $B-\frac{1}{3}\varepsilon$, $C-\frac{1}{3}\varepsilon$, ε *étant l'excès de la somme des angles du triangle sphérique proposé sur deux angles droits.*

Puisque a, b, c sont les côtés d'un triangle sphérique construit sur une sphère dont nous désignerons le rayon par r, un triangle semblable tracé sur la sphère dont le rayon $=1$, aura pour côtés $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$; et par l'art. 18,

$$\cos A = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}.$$

Mais pour abréger nous représenterons respectivement $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ par α, β, γ, et nous aurons

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

r étant fort grand par rapport aux côtés a, b, c, il s'ensuit sans erreur sensible, que

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{2.3.4}, \quad \sin\beta = \beta - \frac{\beta^3}{2.3};$$

il en sera de même des valeurs de $\cos\beta$, $\cos\gamma$ et $\sin\gamma$.

De là l'équation précédente deviendra

$$\cos A = \frac{\frac{1}{2}(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)+\frac{1}{24}(\alpha^4-\beta^4-\gamma^4)-\frac{1}{4}\beta^2\gamma^2}{\beta\gamma(1-\frac{1}{6}\beta^2-\frac{1}{6}\gamma^2)}.$$

Multipliant les deux termes de cette fraction par $1+\frac{1}{6}(\beta^2+\gamma^2)$, ou, ce qui revient au même, transportant au numérateur le facteur $(1-\frac{1}{6}\beta^2-\frac{1}{6}\gamma^2)$ élevé à la puissance -1, et réduisant, on aura

$$\cos A = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}+\frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\gamma^2-2\beta^2\gamma^2}{24\beta\gamma};$$

remettant les valeurs de α, β, γ, le second membre sera toujours composé de la même combinaison de lettres et pourra être représenté par

$$\cos A = \frac{M}{2bc}+\frac{N}{24bcr^2}. \qquad (1)$$

Soit maintenant A' l'angle opposé au côté a, dans le triangle rectiligne dont les côtés seraient égaux en longueur aux arcs a, b, c, on aura,

$$\cos A' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{M}{2bc};$$

élevant les deux membres au quarré et mettant $1-\sin^2 A'$ au lieu de $\cos^2 A'$, il viendra

$$-4b^2c^2\sin^2 A' = a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2 = N.$$

L'équation (1) sera donc ramenée à la forme

$$\cos A = \cos A' - \frac{bc}{6r^2}\sin^2 A'.$$

Soit $A = A'+x$; on aura en rejetant la seconde puissance de x, $\cos A = \cos A' - x\sin A'$; d'où l'on tire, après la substitution de la valeur de $\cos A$,

$$x = \frac{bc}{6r^2}\sin A'.$$

Nous voyons par là que x est du second ordre par rapport à $\frac{b}{r}$ et $\frac{c}{r}$; ainsi ce résultat est exact, aux quantités près du quatrième

ordre. Donc à cause de $A=A'+x$,

$$A=A'+\frac{bc}{6r^2}\sin A';$$

mais $\frac{1}{2}bc\sin A'$ est visiblement l'aire du triangle rectiligne dont a, b, c sont les trois côtés, laquelle ne diffère pas sensiblement de celle du triangle sphérique proposé. Donc si l'une ou l'autre aire est appelée s, on aura

$$A'=A-\frac{s}{3r^2},$$

et semblablement

$$B'=B-\frac{s}{3r^2},$$

$$C'=C-\frac{s}{3r^2},$$

d'où il résulte $A'+B'+C'=2q=A+B+C-\frac{s}{r^2}$.

On peut donc considérer $\frac{s}{r^2}$ comme étant l'excès de la somme des trois angles du triangle sphérique proposé sur deux angles droits.

L'excès $\varepsilon=\frac{s}{r^2}$ qui est proportionnel à l'aire du triangle peut toujours se calculer *à priori*, et cela en considérant le triangle sphérique proposé comme rectiligne. Si donc deux côtés b, c et l'angle compris A sont donnés, on aura l'aire $s=\frac{1}{2}bc\sin A$. Si au contraire on connaît un côté a et les deux angles adjacens B, C, on aura l'aire $s=\frac{1}{2}a^2\frac{\sin B\sin C}{\sin(B+C)}$: cette formule n'est qu'une transformation de la précédente; car il est évident, 1°. que $\sin A=\sin(B+C)$; 2°. que $b=\frac{a\sin B}{\sin(B+C)}$; 3°. et que $c=\frac{a\sin C}{\sin(B+C)}$, art. 19.

La remarque de l'art. 31 est encore applicable dans cette circonstance, où il s'agit d'avoir l'excès ε en secondes; ainsi

$$\varepsilon=\frac{s}{r^2}R.$$

Nous donnerons ailleurs des applications de toutes les formules qui précèdent.

CHAPITRE IV.

Digression sur la recherche analytique des propriétés du cône et de celles de la projection stéréographique de la sphère.

De l'équation individuelle du cône.

FIG. 2. 40. SOIENT a, b, c les coordonnées du sommet S du cône auquel le cercle horizontal AB sert de base ; et soit A l'origine des coordonnées, placée au centre de ce cercle.

Les deux projections verticales de la droite génératrice SB sont en général, d'après le n° 5 des *Feuilles d'analyse de* MONGE.

$$\frac{y-b}{z-c}=f(\alpha) \qquad \frac{x-a}{z-c}=\alpha, \qquad (A)$$

f étant le signe d'une fonction quelconque.

Quant à la courbe individuelle qui dirige le mouvement de cette génératrice, elle peut être considérée comme l'intersection d'une sphère et d'un plan ; or dans cette circonstance la sphère et le plan qui est celui des xy, ont respectivement pour équation

$$x^2+y^2+z^2=r^2, \qquad z=0. \qquad (B)$$

Ces quatre équations devant avoir lieu en même temps, celles (A) deviendront, à cause de $z=0$,

$$\frac{y-b}{-c}=f(\alpha) \qquad \frac{x-a}{-c}=\alpha,$$

d'où l'on tire aisément

$$y^2 = (b - cf(\alpha))^2, \qquad x^2 = (a - c\alpha)^2.$$

Substituant ces valeurs dans la première équation (B), qui se réduit à $x^2 + y^2 = r^2$, on aura

$$b^2 + c^2 f(\alpha)^2 - 2bcf(\alpha) + a^2 + c^2\alpha^2 - 2a\alpha c = r^2;$$

et mettant ici pour $f(\alpha)$ et (α) leurs valeurs (A), il viendra

$$c^2\left(\frac{y-b}{z-c}\right)^2 - 2bc\left(\frac{y-b}{z-c}\right) + c^2\left(\frac{x-a}{z-c}\right)^2 - 2ac\left(\frac{x-a}{z-c}\right) = r^2 - (a^2 + b^2) \ldots (1)$$

Telle est l'équation cherchée de la surface conique.

Si le sommet du cône était dans le plan même des xz, on aurait $b = 0$, et l'équation précédente deviendrait

$$\frac{c^2y^2}{(z-c)^2} + \frac{c^2(x-a)^2}{(z-c)^2} - 2ac\frac{(x-a)}{z-c} = r^2 - a^2.$$

Si, de plus, ce sommet était dans la verticale AZ, on aurait $a = 0$, et parconséquent l'équation du cône droit à base circulaire serait

$$\frac{c^2y^2}{(z-c)^2} + \frac{c^2x^2}{(z-c)^2} = r^2.$$

Lorsque la base du cône droit est une ellipse, on a $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ pour l'équation de cette base, et alors l'équation précédente dans laquelle on peut faire $z - c = z'$ pour transporter l'origine des coordonnées au sommet du cône, devient, en faisant d'ailleurs $m = \frac{a}{c}$, $n = \frac{b}{c}$,

$$m^2y^2 + n^2x^2 = m^2n^2z'^2:$$

c'est sous cette forme très-simple que Euler, dans son *Introductio in analysin infinitorum*, a présenté l'équation du cône à base elliptique.

En plaçant de même l'origine des axes au sommet du cône oblique, l'équation (1) se simplifie et devient, à cause de $x' = x - a$, $y' = y - b$, $z' = z - c$,

$$(a^2 + b^2 - r^2)z'^2 + c^2(x'^2 + y'^2) - 2acx'z' - 2bcy'z' = 0. \quad (2)$$

Examinons maintenant quelles sont les différentes courbes que l'on obtient en coupant un cône par un plan mené d'une manière quelconque.

De l'intersection de la surface du cône et du plan.

41. On reconnaît aisément, à l'aide des considérations synthétiques, l'identité des courbes du second degré avec les intersections du cône oblique à base circulaire et du plan. (Applic. de l'Alg. à la Géom. de Lacroix, n° 143). Nous allons faire voir par une méthode générale et simple, que l'analyse conduit aux mêmes conséquences.

FIG. 3. L'équation à la surface du cône oblique est par l'art. précédent,

$$(a^2+b^2-r^2)z^2+c^2(x^2+y^2)-2acxz-2bcyz=0. \quad (C)$$

son sommet étant placé à l'origine des coordonnées, sa base étant parallèle au plan des xy, le centre O de cette base ayant pour coordonnées a, b, c, et son rayon AO étant désigné par r.

Le moyen qui semble le plus commode pour discuter la courbe d'intersection cherchée, est de placer l'origine et la direction des axes de manière à ce que deux des nouvelles coordonnées relatives à la surface du cône soient dans le plan coupant lui-même; car on conçoit que pour toute la partie commune à ce plan et à la surface conique, la troisième coordonnée est nulle. Nous pouvons donc atteindre ce but en employant les formules connues

$$x=\alpha+x'\cos\varphi+y'\sin\varphi\cos\theta$$
$$y=\beta+x'\sin\varphi-y'\cos\varphi\cos\theta$$
$$z=\gamma+y'\sin\theta.$$

φ étant l'angle que la *trace* horizontale $X'K$ du plan coupant $Y''KX'$, fait avec l'axe des x, et θ l'angle que ce même plan forme avec celui des xy. Mais pour simplifier les calculs, nous ferons dans ces formules, $\sin\varphi=1$ et $\beta=0$; c'est-à-dire que nous placerons la nouvelle origine N dans le plan des xz, alors on aura $Ap=\alpha$, $pN=\gamma$, angle $Y''KX=\theta$, et partant

$$\left.\begin{array}{l} x=\alpha+\cos\theta.y' \\ y=x' \\ z=\gamma+\sin\theta.y' \end{array}\right\} \text{ ou pour abréger } \left\{\begin{array}{l} x=\alpha+my' \\ y=x' \\ z=\gamma+ny'. \end{array}\right.$$

Cela posé, si on élimine de l'équation (C) les variables xyz, on obtiendra en faisant $a^2+b^2-r^2=p$,

$$\left.\begin{array}{l} (pn^2+c^2m^2-2acmn)y'^2+c^2x'^2-2bcnx'y' \\ +2(p\gamma n+\alpha c^2m-a\alpha cn-ac\gamma m)y'-2bc\gamma x' \\ +p\gamma^2+\alpha^2c^2-2a\alpha c\gamma \end{array}\right\}=0. \quad (D)$$

Cette équation, qui est celle de la courbe d'intersection du plan des $x'y'$ et de la surface conique, donne nécessairement naissance à l'une des trois courbes du second ordre, si nous y faisons à-la-fois $\alpha=0$, $\gamma=0$, nous aurons simplement

$$(pn^2+c^2m^2-2acmn)y'^2+c^2x'^2-2bcnx'y'=0. \quad (E)$$

Cette nouvelle formule appartient en général au système de deux droites; car en la résolvant par rapport à y', on obtient un résultat de la forme

$$y'=(M\pm\sqrt{N})x';$$

d'où il suit que tant que N n'est pas nulle ou négative, la section entière du plan des $x'y'$ passant par le sommet du cône forme un triangle; mais lorsque $N=0$, ce plan est évidemment tangent à la surface conique. Cette circonstance a donc lieu quand le premier membre de l'équation (E) est un quarré.

Si, en supposant seulement $\gamma=0$, on cherchait ce que devient la section du plan des $x'y'$ dans le cas où $n=0$, l'équation (D) se réduirait à

$$(y'+\alpha)^2+x'^2=0;$$

et comme alors la valeur de y' ne peut être réelle qu'autant que $x'=0$, auquel cas $y'=-\alpha$; il en résulte que la section se réduit à un point, ce qui est d'ailleurs évident.

Pour une section parabolique l'équation (D) fournit entre les

coefficiens de ses trois premiers termes la relation

$$pn^2 + c^2n^2 - 2aemn - b^2n^2 = 0;$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante, en remplaçant p par sa valeur,

$$(an - cm)^2 = r^2n^2,$$

et d'où l'on tire

$$\frac{n}{m} = \tang\theta = \frac{c}{a \mp r}.$$

FIG. 4. Ce résultat nous apprend que pour que la section soit une parabole, le plan coupant qui passe ailleurs que par la primitive origine A doit être parallèle à la ligne génératrice du cône. En effet, si on forme le prisme triangulaire GAH, EFB, la tangente de l'angle FBE sera $\frac{EF}{EB} = \frac{c}{a-r} = \tang\theta$: donc le plan coupant qui a sa trace horizontale perpendiculaire à BDA et qui fait un angle θ avec le plan des xy, est nécessairement parallèle au plan BAF et parconséquent à la génératrice AB. Pour le cas de $\tang\theta = \frac{c}{a+r}$, il est clair que le plan coupant est parallèle à AD.

On voit bien aussi que (B) est à l'ellipse ou à l'hyperbole selon que $\tang\theta > \frac{c}{a \mp r}$ ou $\tang\theta < \frac{c}{a \mp r}$.

Enfin elle appartient au cercle si les deux équations de condition

$$pn^2 + c^2m^2 - 2aemn = c^2$$
$$bcn = 0$$

ont lieu à-la-fois, ou, ce qui est de même, si

$$\frac{n}{m}\left\{(p - c^2)\frac{n}{m} - 2ac\right\} = 0$$
$$bc\frac{n}{m} = 0.$$

La première a deux racines, dont l'une $\frac{n}{m} = \tang\theta = 0$ satisfait à la seconde équation; mais celle-ci, qui n'est que du premier degré ne peut être vérifiée par la seconde racine $\tang\theta = \frac{2ac}{p - c^2}$; il

il faut donc, pour ce cas, que l'on ait en outre $b=0$. De cette analyse il résulte que le plan coupant donne une section circulaire dans deux positions différentes; d'abord lorsque ce plan est parallèle à la base du cône; ensuite, lorsque formant avec cette base un angle θ dont la tangente $=\frac{2ac}{a^2-r^2-c^2}$, il est en même temps perpendiculaire à la section formée dans le cône par un autre plan perpendiculaire à la base de ce corps et passant par son axe.

La situation du plan coupant à l'égard des génératrices *AB*, *AD* est facile à reconnaître, lorsque tang $\theta=\frac{2ac}{a^2-r^2-a^2}$; car si on imagine dans le cône la section triangulaire *ABD* dont on vient de parler, la droite *BD* sera le diamètre de la base conique, et la droite *AG* la hauteur de ce cône: on aura alors $OB=\frac{BD}{2}=r$, $OG=a$, $AG=c$, $BG=a-r$; et soit l'angle $DBA=B$, et l'angle $BDA=D$, on aura par les formules trigonométriques connues, FIG. 5.

$$\text{tang}\,(B-D)=\frac{\text{tang}\,B-\text{tang}\,D}{1-\text{tang}\,B\,\text{tang}\,D}.$$

Or pour le cas de la figure, $\text{tang}\,B=-\frac{c}{a-r}$ et $\text{tang}\,D=\frac{c}{a+r}$; il suit de là que

$$\text{tang}(B-D)=\frac{-2ac}{a^2-r^2-c^2};$$

mais cette valeur est précisément celle de tangente θ prise avec un signe contraire, donc $\text{tang}\,\theta=-\text{tang}(B-D)$. Donc si on fait l'angle $ABR=D$, on aura $\theta=R'BG=-\text{tang}(B-D)$. Ainsi en menant par la droite *RR'* ou par toute autre qui lui soit parallèle, un plan perpendiculaire à *BAD*, il engendrera une section circulaire sur la surface conique : section que l'on nomme *anti-parallèle* ou *souscontraire*, eu égard à celle qui aurait lieu parallèlement à la base du cône : on voit bien que l'une et l'autre section se confondent lorsque $a=0$, c'est-à-dire quand le cône est droit.

Euler, dans l'*Appendix de superficiebus*, qui termine le se-

cond volume de son *Introd. in analys. infinit.* a traité aussi cette même question d'une manière très-générale : il y considère le cône à base elliptique dont nous avons donné l'équation à l'art. 40; mais nous avons jugé utile d'envisager la chose sous un point de vue un peu différent, afin de lier la théorie suivante avec ce qui précède.

Analyse des principales propriétés de la projection stéréographique de la sphère.

42. Si on prend pour rayon d'une sphère la hauteur d'un cône quelconque à base circulaire, et que le pied de cette hauteur soit le centre de la sphère, l'intersection de sa surface avec celle du cône sera toujours une circonférence de cercle.

FIG. 6. Soit $Ac=a$, $AS=c$, c le centre de la base circulaire du cône oblique $Sn'n''$, et $Cn'=r$ le rayon de cette base.

Nous avons trouvé, art. 40, qu'un cône à base circulaire a pour équation

$$\frac{c^2y^2}{(z-c)^2}+\frac{c^2(x-a)^2}{(z-c)^2}-\frac{2ac(x-a)}{z-c}=r^2-a^2,$$

lorsque l'origine des coordonnées rectangles est placée au centre c de sa base, et que le plan par l'axe passe par sa hauteur SA; mais si l'on transporte l'origine au pied A de cette hauteur, on aura $x=a+x'$, et l'équation précédente deviendra

$$c^2y^2+c^2x'^2-2acx'(z-c)=(r^2-a^2)(z-c)^2.$$

Pour que celle-ci caractérise réellement le cône $Sn'n''$ que l'on considère, il est évident que a et c doivent y être négatifs; ainsi

$$c^2y^2+c^2x'^2-2acx'(z+c)=(r^2-a^2)(z+c)^2. \qquad (A)$$

D'un autre côté, l'équation de la sphère est

$$z^2+y^2+x'^2=c^2,$$

les coordonnées x', y, z devant être les mêmes aux points de la

commune section des deux surfaces, on aura, après avoir éliminé y^2 et supprimé les accens pour simplifier,

$$-c^2(z^2-c^2)-2acx(z+c)=(r^2-a^2)(z+c)^2;$$

divisant tout par $z+c$ et tirant ensuite la valeur de z, on obtiendra

$$z=-\frac{2ac}{r^2-a^2+c^2}x-\frac{c(r^2-a^2-c^2)}{r^2-a^2+c^2}. \qquad (B)$$

Les premières conséquences que l'on tire de cette formule sont, 1°. que la commune section des deux surfaces courbes proposées a pour projection une ligne droite, et parconséquent qu'elle est plane et perpendiculaire au plan des xz; 2°. qu'elle fait avec le plan des xy un angle dont la tangente $=\frac{2ac}{a^2-r^2-c^2}$: or, par l'art. 41, tout plan qui coupe un cône suivant un angle dont la tangente a pour valeur l'expression précédente, forme une *section souscontraire*. Donc le cône $N'SN''$, placé ainsi que le porte l'énoncé du théorême, pénétrera la sphère suivant le cercle $N'VN''$; et réciproquement le cône $N'SN''$ qui aura pour base un cercle $N'VN''$ de la sphère, formera une section circulaire $n'vn''$ sur le plan du grand cercle $B'mB$. Cette section, par rapport au cercle $N'VN''$, en est dite la *projection stéréographique*, parcequ'un œil qui serait placé en S verrait ce cercle en $n'vn''$ sur le plan $B'mB$, considéré comme *plan perspectif.* Tel est le fondement de la projection stéréographique de la sphère, dont nous allons faire connaître les propriétés principales (*).

Si la droite $N'N''$, qui est le diamètre de la section du cône avec la sphère, passait par l'origine des coordonnées, le dernier terme de l'équation (B) serait nul et l'on aurait

$$r^2=a^2+c^2, \qquad y=-\frac{a}{c}x. \qquad (C)$$

Il résulte de là, 1°. que le rayon cc de la projection stéréo-

(*) Il ne s'agira dans ce qui va suivre, que de la projection stéréographique, à moins qu'on n'avertisse du contraire.

graphique d'un grand cercle tel que EmQ est toujours égal à la droite Sc comprise entre le centre c de cette projection et le sommet du cône ESQ; 2°. qu'un grand cercle de la sphère se confond avec sa projection, dans le cas de $a=0$; 3°. et qu'il a
FIG. 6. pour projection l'axe indéfini des y, lorsque $a=\infty$, c'est-à-dire, quand il est perpendiculaire au plan des xy.

43. Supposons maintenant que le plan d'un grand cercle fasse avec le plan des xy un angle déterminé θ, l'équation (C) deviendra, à cause de $\operatorname{tang}\theta=\frac{a}{c}$,

$$y=-\operatorname{tang}\theta.x:$$

de là on voit que

$$a=c\operatorname{tang}\theta;$$

et parceque $r^2=a^2+c^2$, on aura

$$r^2=c^2(1+\operatorname{tang}^2\theta)=c^2\sec^2\theta;$$

partant

$$r=c\sec\theta\quad \overline{eq}=2c.\sec\theta.$$

Si dans (A) l'on fait $z=0$, l'équation résultante

$$y^2+x^2-2ax=r^2-a^2$$

sera celle de la projection circulaire du parallèle $N'VN''$ sur le plan $B'mB$; et comme ici y n'entre qu'au quarré, il s'ensuit que le centre de cette projection tombe sur l'axe des x. En faisant $y=0$, on obtiendra $x=a\pm r$; on aura donc

$$An''=a+r,\qquad An'=a-r.$$

Ces résultats sont évidens à la seule inspection de la figure; mais nous avons voulu faire voir qu'ils dérivent naturellement de l'analyse.

Maintenant pour exprimer a et r en fonction des arcs NN',

NN'', soit $NN' = A'$, $NN'' = A''$, et pour abréger $c = 1$, on aura visiblement

$$a + r = \tang \tfrac{1}{2} A'' \qquad a - r = \tang \tfrac{1}{2} A'.$$

et par suite

$$a = \tfrac{1}{2} \tang \tfrac{1}{2} A'' + \tfrac{1}{2} \tang \tfrac{1}{2} A', \qquad r = \tfrac{1}{2} \tang \tfrac{1}{2} A'' - \tfrac{1}{2} \tang \tfrac{1}{2} A'.$$

ou bien pour la facilité du calcul logarithmique (page 31. L. C.)

$$a = \tfrac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{A'' + A'}{2}\right)}{\cos \frac{1}{2} A'' \cos \frac{1}{2} A'}, \quad r = \tfrac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{A'' - A'}{2}\right)}{\cos \frac{1}{2} A'' \cos \frac{1}{2} A'};$$

ces valeurs appartiennent en général à la projection d'un parallèle: si on les introduit dans (B), on aura à cause de $c = 1$,

$$z = \frac{2a}{(a+r)(a-r) - 1} x - \frac{(a+r)(a-r)+1}{(a+r)(a-r)-1};$$

et après avoir effectué les transformations qui dérivent des formules trigonométriques connues il viendra

$$z = -\tang\left(\frac{A'' + A'}{2}\right) x + \frac{\cos\left(\frac{A'' - A'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A'' + A'}{2}\right)}.$$

Lorsque $\cos\left(\frac{A'' - A'}{2}\right) = 0$, l'équation précédente du plan sécant s'identifie avec celle (C) du n° 42, comme cela doit être.

Si nous considérons P comme le *pôle* de la terre, et le cercle EmQ comme *l'équateur*, l'arc EN qui fait partie du méridien du lieu N sera la *latitude* de ce lieu pris pour *pôle de l'horizon rationnel* $B'mB$ sur lequel on trace les projections. Par la même raison, l'arc EN' sera la latitude de N', et il sera encore aisé de trouver de nouvelles expressions de a et de r en fonction des arcs EN, EN'; car soit $EN = L$, $EN' = L'$, on aura en faisant le quadrans $= q$, FIG. 6.

$$NN' = A' = L' - L; \qquad NN'' = A'' = 2q - (L' + L),$$

et par suite

$$\frac{A''+A'}{2}=q-L, \qquad \frac{A''-A'}{2}=q-L'$$

$$\sin\left(\frac{A''+A'}{2}\right)=\cos L, \qquad \sin\left(\frac{A''-A'}{2}\right)=\cos L'$$

$$\cos\frac{A'}{2}=\cos\left(\frac{L'-L}{2}\right), \quad \cos\frac{A''}{2}=\sin\left(\frac{L'+L}{2}\right).$$

Substituant ces dernières valeurs dans celles de a et de r, trouvées ci-dessus, il viendra

$$a=\frac{\cos L}{2\sin\left(\frac{L'+L}{2}\right)\cos\left(\frac{L'-L}{2}\right)}, \quad r=\frac{\cos L'}{2\sin\left(\frac{L'+L}{2}\right)\cos\left(\frac{L'-L}{2}\right)};$$

et divisant ces deux équations l'une par l'autre, on aura ce rapport fort simple,

$$\frac{a}{r}=\frac{\cos L}{\cos L'}.$$

La quantité a prise sur l'axe des y est la distance du centre de la sphère à celui de la projection d'un parallèle, et la quantité r est le rayon de cette projection; ainsi lorsque l'on connaîtra les latitudes de deux lieux dont l'un est le pôle de l'horizon, on aura, au moyen des formules précédentes, la position du centre et la grandeur du rayon de la projection du parallèle qui passe par l'autre lieu.

44. Jusqu'à présent nous n'avons considéré que les projections des cercles perpendiculaires au plan vertical des xz; déterminons maintenant les projections des grands cercles qui seraient inclinés à l'égard de ce même plan. Pour cet effet, supposons FIG. 7. que le méridien PmP' fasse celui $B'NB$ un angle connu $mPB=p$, et soit $h=PAB$ la hauteur du pôle P, $\varphi=mAB$ l'angle que forme avec l'axe des x la trace Am du plan APm sur l'horizon $B'mB$. Cela posé, l'angle qu'un plan APm fait avec celui des xz, est donné par la formule générale

$$\cos p=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

lorsque ce plan a pour équation $Ax+By+Cz=0$; or dans le cas qui nous occupe, l'équation de la droite AP est

$z = -\frac{A}{C}x$, et celle de la droite Am est $y = -\frac{A}{B}z$. Il suit de là que

$$\frac{A}{C} = \text{tang}\, h, \quad \frac{A}{B} = \text{tang}\, \varphi;$$

mais pouvant faire $C = 1$, à cause que des trois constantes A, B, C une peut être arbitraire, on aura

$$A = \text{tang}\, h, \quad B = \frac{\text{tang}\, h}{\text{tang}\, \varphi};$$

et parconséquent

$$\cos p = \frac{\text{tang}\, h}{\text{tang}\, \varphi \sqrt{\left(\text{tang}^2 h + \frac{\text{tang}^2 h}{\text{tang}^2 \varphi} + 1\right)}}.$$

élevant tout au quarré, il viendra

$$\cos^2 p = \frac{1}{1 + \text{tang}^2 p} = \frac{1}{\text{tang}^2 \varphi + 1 + \frac{\text{tang}^2 \varphi}{\text{tang}^2 h}},$$

ou plus simplement en égalant les dénominateurs

$$\text{tang}^2 p = \frac{\text{tang}^2 \varphi}{\text{tang}^2 h \cos^2 h} = \frac{\text{tang}^2 \varphi}{\sin^2 h},$$

ou enfin

$$\text{tang}\, \varphi = \text{tang}\, p \sin h.$$

Cette formule, que l'on peut d'ailleurs déduire immédiatement des principes de trigonométrie sphérique, donne un moyen fort simple d'obtenir les points m, m' communs au méridien PmP', et à sa projection ; et comme on a de plus en p, p' les projections constantes des pôles P, P', il s'ensuit, 1°. que la circonférence qui passera par les trois points p, m, p' sera la projection horizontale du méridien PmP'; 2°. que les centres des projections de tous les méridiens seront situés sur la perpendiculaire qui divise la corde pp' en deux parties égales.

On voit d'abord ce qu'il faut faire pour déterminer graphiquement la projection des pôles P, P', puisque la position de l'axe de la terre est connue à l'égard de l'horizon BB'; et l'on conçoit aisément que pour faire usage du calcul, on a par l'art. 43, et en vertu des fonctions circulaires,

$$Ap = \text{tang}\left(\frac{q}{2}-\frac{h}{2}\right) = \frac{1-\sin h}{\cos h},\ Ap' = \text{tang}\left(\frac{q}{2}+\frac{h}{2}\right) = \frac{1+\sin h}{\cos h};\ (*)$$

donc

$$\overline{pp'} = 2\sec h,$$

q désignant, comme à l'ordinaire, le quart de la circonférence, et h la hauteur du pôle.

FIG. 8. Pour déterminer les valeurs trigonométriques des coordonnées des centres et les rayons des projections des méridiens; soit D le milieu de la droite pp', $AD=x$ l'abscisse, et $CD=y$ l'ordonnée de ce centre. L'équation de la droite AC perpendiculaire à la trace Am que le méridien forme sur le plan horizontal est, à cause de $mAB=\varphi$,

$$y = -\frac{1}{\text{tang}\,\varphi}\,x.$$

De plus, comme on a

$$AD = Ap' - Dp' = \sec h - \left(\frac{1+\sin h}{\cos h}\right) = -\,\text{tang}\,h,$$

l'équation de la droite CD est

(*) Pour comprendre ces transformations, il faut remarquer que

$$\sin\left(\frac{q}{2}+\frac{h}{2}\right) = \frac{\cos\frac{1}{2}h + \sin\frac{1}{2}h}{\sqrt{2}};$$

or en chassant le dénominateur et en élevant le tout au quarré, on aura

$$2\sin^2\left(\frac{q}{2}+\frac{h}{2}\right) = 1 + \sin h \qquad (1).$$

D'un autre côté, à cause de $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A\cos B$, il viendra, en faisant $A+B=q$, $A-B=h$,

$$2\cos\left(\frac{q}{2}+\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{q}{2}-\frac{h}{2}\right) = \cos h + \cos q = \cos h.$$

Enfin, si l'on divise l'équation (1) par celle-ci, on aura

$$\frac{1+\sin h}{\cos h} = \text{tang}\left(\frac{q}{2}+\frac{h}{2}\right).$$

$y=$

$$x = -\tang h\,;$$

substituant cette valeur dans celle de y, on obtient

$$y = \frac{\tang h}{\tang \varphi} = \frac{\tang h}{\tang p \sin h} = \frac{\sec h}{\tang p}.$$

Il suit de là que l'hypothénuse $p'C$ du triangle $p'DC$, ou le rayon de projection que l'on cherche,

$$R = \sqrt{\sec^2 h + y^2} = \frac{\sec h}{\sin p}.$$

45. Pour terminer ce qu'il nous reste à dire de plus important sur la théorie actuelle, cherchons la projection de l'écliptique, et pour cet effet supposons que le cercle $ONEM$ soit l'horizon d'un lieu tel que Paris; alors cette ville sera projetée au centre A de cet horizon. Supposons en outre que OBE, IBI' soient respectivement les moitiés de l'équateur et de l'écliptique. Enfin désignons par M la longitude du point équinoxial B, comptée du méridien de Paris NQM; par θ l'inclinaison OIB de l'écliptique sur l'horizon, et par ϵ l'obliquité de l'écliptique ou l'angle IBO. FIG. 9.

Cela posé, dans le triangle sphérique IBO on connaît l'angle $IOB = 2^q - BOM = 2^q - (1^q - h) = 1^q + h$, h étant la hauteur du pôle. On connaît, de plus, $OB = OQ - BQ = 1^q - M$, et l'angle $IBO = \epsilon$; on aura donc le côté $OI = \varphi$, ou la mesure de l'angle IAO par la formule de l'art. 28, c'est-à-dire que

$$\cot \varphi = \frac{\cot \epsilon \cos h}{\cos M} - \tang M \sin h.$$

L'angle φ étant connu, on aura la position de la droite II', et parconséquent deux points de la projection de l'écliptique.

Quant à l'angle θ, on l'obtiendra au moyen de la formule de l'art ; ainsi

$$\cos \theta = \sin M \sin \epsilon \cos h + \cos \epsilon \sin h.$$

Maintenant si les droites pAp', mAm' sont respectivement dans les plans de l'horizon et de l'écliptique, et si elles sont en même temps perpendiculaires à la commune section II', l'angle qu'elles formeront mesurera l'inclinaison de ces plans. En concevant donc

que SA soit le rayon de la sphère, perpendiculaire à l'horizon, les droites Sm, Sm' rencontreront ce plan en des points p, p', qui seront les projections du diamètre mm' de l'écliptique. Il suit de là et de ce que Ap est perpendiculaire à II', que le centre de la projection de l'écliptique sera sur le milieu de pp': donc suivant l'art. 43, le rayon de cette projection, ou

$$r = \sec\theta;$$

de même la distance de son centre au point A, ou

$$a = \tang\theta.$$

Nous laissons au lecteur intelligent le soin de tirer de nouvelles conséquences de la théorie que nous venons d'exposer; nous observerons seulement que les formules précédentes peuvent être modifiées de manière à convenir au cas de la projection sur l'équateur ou sur un méridien quelconque, et cela, en faisant $h = 1^r$, ou $h = 0$. Dans son Introduction à la Géographie de Pinkerton, Lacroix a fait l'analyse complète et indiqué les constructions de toutes les espèces de projections des cartes géographiques; nous renvoyons, en conséquence, à cet ouvrage, si l'on desire de plus amples éclaircissemens sur cette matière.

LIVRE III.

OPÉRATIONS GÉODÉSIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

Considérations générales sur les levés des Plans et des Cartes géographiques.

46. LA GÉODÉSIE est une partie de la Géométrie appliquée qui traite de la division des champs; mais suivant l'acception la plus étendue, elle a pour objet la mesure de la terre ou celle d'une partie de sa surface. Les opérations par lesquelles on détermine les principaux points des cartes des petits et des grands états sont donc des opérations géodésiques : c'est sous ce dernier point de vue que nous envisagerons cette science.

Les positions respectives des différens lieux d'un pays dont on se propose de lever le plan, doivent être déterminées par les sommets des angles des triangles qui, par leur enchaînement, composent un réseau continu dans tous les sens. Ces triangles réunissent les conditions les plus avantageuses lorsqu'ils sont les plus grands possibles, les plus appprochans de la forme équilatérale, et liés au moins à une ligne principale ou *base* que l'on mesure avec le même soin que l'on a mis dans l'observation des angles. Lorsque cette base et les trois angles de chaque triangle sont connus, on a tous les élémens nécessaires pour calculer de proche en proche

les distances entre les objets ; et le canevas général d'une carte étant une fois établi, on couvre de canevas partiels ou de *triangles secondaires* l'aire de chaque grand triangle. On a par ce moyen une multitude de petites bases et de points rapprochés auxquels ceux qui relèvent les détails à la planchette pour former la *topographie* du pays, rattachent continuellement leurs opérations.

L'instrument que l'on emploie depuis plusieurs années pour mesurer les angles des triangles du premier et du deuxième ordre, ainsi que pour observer les latitudes et les azimuths, est le *cercle répétiteur* de Borda (*); c'est le seul dont nous donnerons la description, et dont nous ferons connaître l'usage, parceque c'est de tous les goniomètres connus, celui qui donne le plus de précision en sonmettant les angles à l'exactitude d'une ou de deux secondes. Il est en outre très-portatif, et on l'établit avec une grande facilité dans le plan des objets ; mais comme l'axe de la lunette inférieure ne passe pas par celui de l'instrument, l'angle observé a quelquefois besoin d'être corrigé de la petite erreur causée par l'excentricité de cette lunette. (**)

Il est même souvent impossible de placer le cercle au centre de la station, et alors l'angle observé doit encore éprouver une correction que l'on désigne sous le nom de *réduction au centre*, et qui est de même nature que celle dont il vient d'être question.

Il arrive en outre presque toujours que l'angle observé est incliné à l'égard du plan horizontal que l'on imagine passer par le centre de l'instrument : la projection de cet angle sur ce plan se nomme *réduction à l'horizon*.

Enfin si l'objet sur lequel on pointe est éclairé par le soleil,

(*) MM. Lenoir et Bellet sont parmi nos plus habiles artistes ceux qui construisent avec le plus de soin et d'intelligence les instrumens de mathématiques, et surtout les cercles dont il s'agit.

(**) Les planches III et suivantes ayant été gravées il y a environ 8 ans, d'après le premier cercle que Borda fit construire, nous avons été obligés de les laisser intactes ; mais comme on ne donne plus maintenant d'excentricité à la lunette supérieure, nous avons indiqué par la ligne *ab* que l'axe de cette lunette doit passer par le centre de l'instrument.

l'observateur n'en voit ordinairement qu'une partie ou *phase*, et le rayon visuel dirigé sur le milieu apparent de cette phase ne passe pas par le centre de l'objet. Il faut donc encore à l'angle observé, faire une correction qui dépend essentiellement de la position du soleil et de la forme de l'objet; mais il est très-rare que cette correction soit sensible, parceque l'on fait ensorte de pouvoir pointer sur des objets d'une très-petite largeur apparente.

Lorsque les angles des triangles de la grande chaîne sont réduits à l'horizon, on ajoute ceux d'un même triangle, et la somme que l'on obtient surpasse nécessairement deux angles droits; parceque les angles ajoutés sont ceux d'un triangle sphérique dont les côtés très-peu courbes, à la vérité, représentent les distances curvilignes comprises entre les verticales des stations. Ensuite l'excès dont il s'agit, et qui est en même temps affecté de l'erreur de l'observation, se répartit indistinctement par tiers sur les trois angles du triangle dont il dépend. Quand ces angles sont ainsi réduits à ne valoir que deux angles droits, on procède au calcul des distances en les considérant simplement comme des côtés de triangles rectilignes: ils sont néanmoins des arcs de grands cercles de la sphère dont le rayon est le même que celui de la ligne géodésique ou de la base réduite préalablement à un niveau constant. Quant aux triangles secondaires, ils se forment, s'observent et se résolvent de la même manière que les grands triangles qui leur fournissent pour bases un ou plusieurs de leurs côtés.

Au lieu de ramener par cette voie la résolution des triangles sphériques à celle des triangles rectilignes, on peut réduire les angles horizontaux aux angles formés respectivement par les cordes des arcs compris entre les stations; et pour lors les triangles à calculer sont réellement des triangles rectilignes, dont un des côtés est la base mesurée et réduite à sa corde ainsi qu'à un horizon fixe, tel que celui de la mer.

On ne peut néanmoins à l'aide des seules distances calculées, assigner la place que les stations occupent réellement sur le globe terrestre; il faut en outre déterminer la latitude et la longitude de l'une d'elles, ainsi que l'*azimuth* d'un des côtés de la chaîne, c'est-à-dire l'angle qu'il forme avec le méridien connu. On déduit



alors de ces nouvelles données les distances des objets terrestres à l'équateur et au méridien d'où l'on est convenu de compter les longitudes. Il est surtout essentiel dans les triangulations du premier ordre, de mesurer une ou deux bases de vérification, et de s'assurer si les résultats fournis par les calculs s'accordent avec les latitudes et les azimuths observés vers les extrémités de la chaîne des triangles.

Tel est le précis des opérations à faire, soit que l'on veuille former la carte d'un pays, soit que l'on ait pour but de déterminer les dimensions de la terre, ou du moins d'obtenir des résultats qui nous éclairent plus particulièrement sur sa forme. Nous allons entrer dans des détails plus circonstanciés sur ces matières importantes, et nous tâcherons que ceux mêmes à qui l'analyse et la géométrie ne sont pas familières, retirent tout le fruit possible de la lecture de cet Ouvrage.

CHAPITRE II.

De la meilleure condition des triangles et de la construction des signaux.

47. Nous avons déjà observé que les triangles doivent être les plus grands possibles ; mais la courbure de la terre et la force des lunettes du cercle répétiteur fixent à cet égard une limite que l'on ne saurait franchir sans s'exposer à nuire aux avantages d'un bon instrument, quand les objets que l'on observe sont bien distincts.

Nous avons dit aussi que les triangles doivent être équilatéraux ou peu différens de cette forme, parceque dans cet état les angles s'observent avec plus de facilité, et que les petites erreurs commises dans leur mesure influent le moins sur la longueur des côtés. Cependant il est difficile de faire sur le terrein un choix aussi heureux, et il faut même convenir que depuis que l'on est en possession du cercle répétiteur, il n'est pas nécessaire de s'astreindre à cette règle ; car en admettant qu'un cercle donne seulement les angles à un milligrade près (3",2 de l'ancienne division), et que l'on commette cette erreur sur un angle de 25 grades, elle n'influera pas sur les unités de mètres, lors même que le grand côté du triangle serait de 60000^{mèt}. On peut donc établir en principe que *les angles des triangles primaires ne peuvent être plus petits que 25 grades.*

Il est aisé de se convaincre en outre que si dans une série de cinq triangles dont les côtés ne surpasseraient pas 20000^{mèt}., et dont les angles seraient exacts à 5 milligrades près (16",2 de l'ancienne division), il existait une erreur en sens contraire des quatre autres, ce qui est d'ailleurs peu probable, les longueurs des côtés du cinquième triangle ne sauraient être affectés d'une erreur au-dessus

de 5 mètres. (Consultez à cet égard la Trig. de Cagnoli, page 177 et suivantes; ainsi que l'Instruction du dépôt général de la guerre, sur la disposition et la tenue des registres de calculs géodésiques.)

Pour mettre en parallèle les résultats obtenus avant et depuis l'invention d'instrumens plus parfaits et de méthodes de calculs plus rigoureuses, il suffit de rappeler que Bouguer et les autres académiciens français qui furent chargés de la mesure des trois premiers degrés du méridien au Pérou, trouvèrent 65 centimètres (2 piés) d'erreur entre la mesure et le calcul, sur la dernière base déduite d'une série de 28 triangles étendus sur un arc de plus de 350 mille mètres; tandis que Delambre et Méchain n'ont pas trouvé une différence d'un tiers de mètre dans la longueur de la base de Perpignan, conclue de celle de Melun, par la chaîne des triangles qui les unissent, quoique la distance qui sépare ces deux bases surpasse 900 mille mètres. Les erreurs, loin de s'accumuler peu à peu sur les côtés des triangles d'où dérive la détermination de la dernière ligne du réseau, se compensent donc au contraire, lorsque ces triangles sont assez multipliés, et qu'ils sont disposés de manière à remplir les conditions énoncées précédemment.

48. Les clochers, les tours, les donjons couronnés de plateformes, sont en général des signaux commodes pour l'observation; mais il n'est pas toujours possible d'en disposer pour former des triangles avec les conditions les plus avantageuses : alors on supplée à ces objets par des signaux que l'on établit sur des lieux élevés. De longues files de bois de sapin, garnies de feuillages en forme de cônes alongés, ou de petits arbres bien droits et dépouillés de leurs branches vers le bas de leur tige, sont de bons signaux qui, lorsqu'ils sont placés isolément et sur les sommets des montagnes, s'apperçoivent de très-loin, surtout quand ils se projettent sur le ciel.

On fait aussi construire en pierre des pyramides quarrées, et on les dispose de manière que les faces soient à-peu-près perpendiculaires aux côtés des triangles qui ont ces pyramides pour sommets. Si ces signaux se projetaient en terre ou sur un fond qui les dérobât à la vue, on les ferait peindre afin qu'ils pûssent se bien détacher par l'effet de l'opposition des couleurs.

En

En donnant seulement à un signal une longueur de $\frac{3}{100000}$ du plus grand côté du triangle et à la base le $\frac{1}{3}$ de la hauteur, il sera vu à plus de 60000$^{\text{mèt.}}$ de distance. Lorsqu'on le construit en bois, comme nous venons de le dire, ou bien lorsque l'on se contente d'unir, en forme d'arcs-boutans, de longues branches enfoncées en terre, on laisse libre l'intérieur du signal, et l'on conserve des ouvertures dans la direction des côtés des triangles, afin que l'on puisse observer les angles au centre même de la station.

La forme pyramidale que l'on donne aux signaux n'est préférable que quand on peut en voir les sommets, parcequ'il n'y a ni erreur dans le pointé, ni réduction à faire relativement à la phase de ces signaux. Ce qui vaudrait mieux, dans le cas contraire, serait de leur donner la forme d'un parallélipipède à base quarrée, et de faire usage de la formule de réduction donnée à l'art. 62, s'ils étaient éclairés obliquement. On verra dans les articles subséquens une autre formule de même nature, applicable aux tours rondes.

Il est utile de savoir si un signal qu'on veut placer, sera vu en terre ou dans le ciel; Delambre a donné pour cela une formule qui résout la question, (page 171 de la *Détermination d'un arc du méridien*).

Il nous resterait à parler des signaux de nuit, si les *lampes à réverbère* ne s'employaient avec succès, surtout quand l'atmosphère ne fait pas osciller le lieu apparent de leur lumière. Cependant les observations faites pendant le jour sont les plus exactes.

CHAPITRE III.

De la description et de l'usage du Cercle répétiteur.

49. Si on partage la circonférence d'un cercle en plusieurs parties égales, et qu'à partir de zéro l'on porte successivement sur cette circonférence, et suivant l'ordre des divisions, la longueur d'un arc jusqu'à ce que sa seconde extrémité tombe exactement sur une de ces divisions, ou du moins en soit si près, que la différence échappe aux sens, on obtiendra rigoureusement ou d'une manière très-approchée le nombre des parties contenues dans l'arc proposé, en divisant le nombre des parties de l'espace parcouru, par le nombre de fois que l'arc aura été porté sur la circonférence. Supposons, par exemple, que cette circonférence soit divisée en 4000 parties, et qu'à la neuvième fois, et après une révolution entière, l'arc dont on cherche la mesure tombe sur la 50ième division; il est clair que l'espace parcouru contiendra 4050 parties, et que l'arc proposé aura pour mesure $\frac{4050}{9} = 450$: cet arc sera donc à la circonférence dans le rapport de 9 : 80.

Ce moyen fort ingénieux de trouver par des opérations répétées le rapport de l'arc à la circonférence, est dû à Tobie Mayer; mais Borda conçut plus particulièrement l'idée de l'appliquer à la mesure des angles, et de composer pour cet effet le cercle répétiteur dont nous avons déjà parlé, et qui réunit le précieux avantage d'atténuer presqu'entièrement les erreurs de la division, en multipliant indéfiniment les observations.

Pl. III. Un cercle de 45 centimètres (16 pouces) de diamètre suffit pour les opérations les plus délicates de la Géodésie, et son limbe comprend aisément 4000 divisions égales, dont 10 forment le grade ou le degré décimal. Dans un cercle de cette dimension, la lunette

supérieure AB est ordinairement adaptée à un châssis qui porte 4 verniers ou nonius N, disposés à angles droits, et à l'aide desquels on lit la division sur quatre points de la circonférence (*): par ce moyen, les erreurs qui peuvent dépendre de l'excentricité de l'instrument sont encore diminuées. A la lunette inférieure $A'B'$ est fixé un niveau à bulle d'air df, qui sert dans la mesure des distances au zénith.

Chaque vernier est divisé en 10 parties égales qui répondent à 9 divisions du limbe : ainsi lorsque la première ligne de division du vernier ou l'*index* est exactement sur une ligne de division du limbe, au 40° grade par exemple, la seconde ligne du vernier est en arrière de sa correspondante sur le limbe d'un dixième de décigrade, c'est-à-dire d'une minute centésimale. Si donc on faisait avancer la lunette supérieure suivant l'ordre des divisions et de manière que toutes les lignes du vernier coincidassent les unes après les autres avec celles du limbe, on lirait successivement

$$40{,}0 \qquad 40{,}01 \qquad 40{,}02 \ldots\ldots\ldots\ldots 40{,}1,$$

puisque l'index partant du 40ième grade aurait parcouru $\frac{1}{10}$, ensuite $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{10}$, ... $\frac{10}{10}$ d'un décigrade ou de la plus petite division du limbe. Le vernier donne donc dans ce cas les centièmes de grade, ensuite l'on tient compte des milligrades, par estime. En général, si le vernier contient n divisions, il donnera la $\frac{1}{n^{ième}}$ partie de la plus petite division du limbe, et parconséquent la division du vernier et celle du limbe seront toujours entr'elles dans le rapport de $n : n-1$.

Il suit de là que si un cercle est d'une petitesse telle que sa circonférence ne puisse être divisée qu'en 2000 parties dont 5 font le grade, et auquel cas chacune égale 20 centigrades, ce vernier fournira les minutes centésimales de 2 en 2, en faisant $\frac{1}{n}\,20 = 2$, ou $n = 10$; c'est-à-dire que 10 divisions du vernier devront comme ci-dessus en comprendre 9 du limbe.

(*) On construit rarement 4 verniers, parcequ'ils usent beaucoup plus vite par leur frottement le limbe et les divisions qui y sont tracées.

Chaque lunette a ses réticules ou ses fils qui ont la propriété de se mouvoir perpendiculairement à l'axe optique, et de s'incliner d'un demi-quadrans; parceque pour relever les angles sur le terrein, il est plus exact et plus commode de placer les objets au milieu de l'angle des deux fils. S'il arrivait que ces fils offrissent une *parallaxe*, c'est-à-dire que leur image ne fût pas aussi nette que celle des objets, on rapprocherait ou l'on éloignerait convenablement des réticules le verre objectif qui tient ordinairement à une petite pièce cylindrique mobile *m*, jointe au corps de la lunette; et l'on rendrait les axes optiques parallèles au plan du limbe au moyen d'une *lunette d'épreuve ep*. Cette lunette qui n'a qu'un fil traverse deux quarrés *qq'* dont les faces opposées sont bien parallèles. Lorsqu'elle est placée sur le limbe de l'instrument, on voit à quel point distinct d'un objet éloigné son fil répond, et il faut qu'en la renversant sur les faces opposés des quarrés, le fil passe par le même point apparent; on est sûr alors qu'il est parfaitement dans l'axe optique. Cette vérification étant faite, et la lunette d'épreuve restant dans la même situation, on dirige sur le même point que celle-ci les deux lunettes de l'instrument, et quand les intersections des fils inclinés de 50 grades n'y répondent pas, on les y ramène à l'aide des vis de rappel *r* des réticules: c'est de la même manière que l'on corrige la déviation du fil de la lunette d'épreuve.

Il est à propos de remarquer que si l'on ne voulait pas incliner les fils des réticules, il faudrait préalablement les vérifier dans leur situation primitive; parceque comme ils ont dans chaque lunette un mouvement commun, il arrive souvent que par un petit défaut de construction leurs intersections ne répondent pas précisément au même point dans les deux positions que l'on peut donner aux réticules, et c'est ce qui fait que le cercle semble quitter continuellement le plan des objets dans lequel il a d'abord été fixé, et que les angles sont observés dans un plan autre que celui sur lequel on compte les grades.

De la mesure des angles entre les objets terrestres.

50. Pour procéder à la mesure d'un angle, il faut d'abord amener les axes optiques des lunettes dans le plan de cet angle, et

les y conserver pendant tout le cours de l'observation. Nous remarquerons à cet égard que le secours mutuel de deux observateurs fait éviter beaucoup de lenteurs et de tâtonnemens, en faisant usage de la méthode suivante.

On commence par disposer le limbe de l'instrument de manière que son plan passe à très-peu-près sur les deux points de mire; pour cela, on bornoye à la vue simple en inclinant seulement le cercle, et en faisant tourner un peu, s'il est nécessaire, tout l'instrument sur sa colonne; afin que les objets paraissent à égale distance du limbe. Ensuite l'un des observateurs rendant la colonne immobile, donne un mouvement de rotation au limbe jusqu'à ce que la lunette supérieure fixée à zéro, soit sur l'un des objets. Le second observateur de son côté place la lunette inférieure dans la direction de l'autre objet, et chacun choisissant une vis du pied de l'instrument la plus voisine du vertical de son oculaire, la fait mouvoir pour amener l'image de l'objet dans le champ de sa lunette, et de là sur l'intersection même des fils.

Ce procédé est évidemment fondé sur ce principe, qu'un plan est donné de position lorsqu'il repose sur deux droites qui se coupent; ou lorsque passant par un point, il est assujéti à être parallèle à ces mêmes droites.

Nous avons implicitement supposé dans ce qui précède, que les intersections des fils des réticules étaient parallèles au plan du cercle. S'il en était autrement, il faudrait d'abord faire les corrections indiquées à l'art. 49.

Maintenant si, comme il est d'usage, les divisions du limbe sont écrites de gauche à droite, on amènera, 1°. sur l'objet à droite la lunette supérieure toujours fixée sur zéro; 2°. on amènera de même la lunette inférieure sur l'objet à gauche, et quand les deux lunettes seront exactement dirigées sur les deux objets, on aura la première partie de l'observation.

3°. Sans déranger les lunettes, on fera tourner le limbe en dirigeant la lunette inférieure sur l'objet à droite, et alors l'objectif de la lunette supérieure aura été repoussée dans le même sens d'une quantité égale à l'angle mesuré.

4°. On amènera enfin la lunette supérieure sur l'objet à gauche,

et par ce mouvement qui n'a lieu que pour cette lunette, elle aura décrit un arc égal au double de celui qui mesure l'angle proposé. On lira l'arc parcouru dont la moitié sera la première mesure de cet angle, abstraction faite toutefois de l'erreur causée par l'excentricité de la lunette inférieure.

Cette mesure s'obtient donc à l'aide de deux *observations conjuguées:* dans la première la lunette supérieure est fixe à l'égard du limbe, tandis que l'inférieure est mobile, et c'est tout le contraire dans la seconde observation.

En répétant l'opération précédente 1, 2, 3, 4.... fois, et partant toujours du point où la lunette supérieure est arrivée sur le limbe à la seconde observation conjuguée, on aura évidemment le quadruple, le sextuple, l'octuple, etc. de l'angle, pourvu que l'on ne néglige pas de tenir compte des circonférences entières parcourues.

Pour des observations de peu d'importance, on peut ramener l'usage du cercle à celui du graphomètre, en fixant invariablement à zéro la lunette inférieure; et c'est à quoi l'on parvient en dirigeant les deux lunettes sur un même objet, le plus éloigné possible; la lunette supérieure étant préalablement amenée sur zéro.

Il est très-rare que les alidades soient exactement à angles droits; alors si les nonius marquent des nombres différens, on doit nécessairement prendre un milieu entre les quatre arcs parcourus. Supposons, par exemple, qu'on lise les quantités suivantes au commencement de l'opération

Alidades	1re	2e	3e	4e
(*a*)	0,000	100,025	199.985	300,015

et qu'après la dixième observation de l'angle, elles marquent les nombres suivans, en tenant compte des circonférences entières parcourues durant la série.

(*b*)	548,142	648,108	748,100	848,105.

Faisant les quatre soustractions par ordre, les arcs parcourus par les alidades sont respectivement

548,142	548,083	548,115	548,090;

et par un milieu entre les quatre, on a 548^{gr},1075. Divisant ensuite cette quantité par le nombre des observations, c'est-à-dire par 10, on trouve pour l'angle simple 54^{gr},81075.

Mais comme toute soustraction peut être changée en addition à l'aide des complémens arithmétiques, il est plus commode et plus court d'opérer de la manière suivante.

On prend les complémens à l'unité, des nombres de la ligne (*a*) en rejetant les unités entières, ou ce qui revient au même, on lit le nonius à contre-sens, en mettant par la pensée 10 à la place de zéro et réciproquement ; ainsi en vertu des données précédentes, on a

(*c*) 0,000 0,975 0,015 0,985 ;

puis l'on ajoute à ces complémens les parties décimales de la ligne (*b*)

(*d*) 0,142 0,108 0,100 0,105,

et l'on prend le quart de la somme 0,430(*), ce qui donne pour la partie décimale de l'arc parcouru 0,1075; donc le décuple de l'angle = 548^{gr},1075 ; donc l'angle simple = 54^{gr},81075.

C'est ainsi que l'on opère en pareille circonstance ; cependant nous croyons qu'il est à propos de remarquer que quand les nombres de la ligne (*b*), abstraction faite des centaines superflues, ne sont pas tous composés des mêmes unités entières, il est nécessaire de modifier ce dernier procédé ; mais pour éviter tout embarras, il vaut mieux dans ce cas, qui est fort rare à la vérité,

(*) On pourrait croire d'abord que cette somme est encore trop forte d'une unité, puisque l'on a pris trois complémens, et que l'on n'a réellement omis que deux unités; mais en réfléchissant un peu, on verra qu'elle est naturellement ramenée à sa véritable valeur par l'effet d'une compensation qui s'est opérée dans le calcul; et c'est même ce qui a lieu toutes les fois que les alidades au point de départ, marquent des nombres au-dessous de 100, 200 ou 300. En effet, dans l'exemple ci-dessus, l'arc parcouru par la 3e alidade = 748,000 — 199,985 = 748,100 — 200,985 + 1 = 548,100 + (1 — 0,985) = 548,100 + 0,015. Il n'y a donc, malgré le complément, aucune somme à ôter de ce résultat; donc la somme 430 est exacte.

faire usage de la première méthode. Si, par exemple, les quatre alidades marquaient au commencement de l'observation

$0^{gr},000$ $100^{gr},025$ $199^{gr},985$ $300^{gr},015$,

et à la fin

500,000 600,005 699,995 800,000;

les arcs parcourus par chacune des quatre alidades seraient

500 499,980 500,010 499,985,

et le quart de leur somme = 499,99375; donc si l'on avait fait dix observations, l'angle simple serait $49^{gr}999375$.

A moins que l'on ait peu de temps pour observer, il est toujours utile de noter tous les angles d'une même série, afin de pouvoir s'assurer de l'uniformité de sa marche. Voici l'ordre que l'on doit suivre à cet égard.

Numéros des observations.	ANGLES ENTRE LES SIGNAUX	
	multiples.	simples.
2.	$117^{gr}.389$	$58^{gr}.6945$
4.	234.778	58.6945
6.	352.167	58.6945
8.	469.557	58.694625
10.	586.947	58.6947
12.	704.338	58.694833
14.	821.729	58.694928
16.	939.122	58.695125
18.	1056.511	58.695055
20.	1173.911	0,000
	915..................	985
	910..................	995
	905..................	992
Al.......	972	
	3,613	
	1173,90325	58.6951625

Le

Le nombre 972 qui est sur la ligne marquée *Al*, exprime la somme des complémens des nombres indiqués par les quatre alidades au commencement de l'observation.

Il n'arrive pas toujours que les séries de cette espèce soient aussi régulières que la précédente; car les vapeurs qui s'élèvent quelquefois durant l'observation, peuvent faire osciller sensiblement le lieu apparent de l'objet autour de son lieu vrai. D'un autre côté, lorsque le vent agite l'instrument ou les signaux, le pointé est incertain, et alors les résultats de l'observation présentent des anomalies beaucoup plus grandes que dans des temps plus calmes et plus sereins.

De la mesure des distances au zénith.

51. Avant de mesurer une distance au zénith, c'est-à-dire l'angle entre un objet et le zénith de l'observateur, on mettra le limbe de l'instrument dans une situation verticale, puisque c'est dans ce plan qu'est situé l'angle proposé. Voici en peu de mots comment cette opération préliminaire et essentielle doit s'effectuer.

On disposera l'axe du limbe dans une position à-peu-près horizontale, et après avoir amené la bulle d'air du grand niveau *df* Pl. V et VI. au milieu du tube, on fera tourner tout l'instrument sur sa colonne *S*, de manière que l'index du cercle azimuthal *zz′* partant de la division qui se trouve vis-à-vis un des pieds de l'instrument, parcoure une demi-circonférence. Si dans cet état la bulle d'air ne revient pas d'elle-même au milieu du tube, l'axe de la colonne ne sera pas dans un plan vertical; alors on fera la correction partie avec la vis du pied *V*, partie avec la vis de rappel *R′* de la lunette inférieure.

On ramènera l'index du cercle azimuthal au point de départ, et si dans cette première position la bulle ne conserve pas le milieu du tube, on fera la correction qui vient d'être indiquée : on continuera cette épreuve jusqu'à ce que la bulle marque dans les deux positions de l'instrument que la lunette inférieure est de niveau, ou ce qui revient au même, que l'axe de la colonne est dans un plan vertical passant par *zz′* et par le centre du cercle azimuthal.

Ensuite, si après avoir placé l'index près d'une autre vis V' du pied de l'instrument, la bulle quitte le milieu du tube, on l'y ramènera en faisant seulement tourner dans le sens convenable la vis V'. Dans cet état, l'axe de la colonne sera situé dans un autre plan vertical passant par le centre du cercle azimuthal : donc cet axe étant à-la-fois dans deux plans verticaux différens, sera lui-même vertical; ainsi quelque part que soit placé l'index, la bulle restera au milieu du tube.

Pl. VI. Enfin l'on mettra aussi exactement qu'il sera possible le limbe de l'instrument dans une position verticale, à l'aide d'un fil à plomb, et si dans cette position le petit niveau *gh* que porte l'axe du cercle est incliné à l'horizon, on amènera la bulle au milieu du tube, au moyen de la vis de rappel qui est adaptée à ce niveau.

Maintenant pour mesurer une distance au zénith, on fixera d'abord à zéro l'un des verniers de la lunette supérieure, et pendant qu'un observateur la dirigera sur l'objet proposé, un autre observateur placera horizontalement la lunette inférieure qui porte le grand niveau, en la faisant mouvoir indépendamment du limbe de l'instrument; lorsque la bulle restera au milieu du tube en même temps que le point de mire sera couvert par le fil horizontal du réticule, on aura la première partie de l'observation, et le cercle sera à droite de celui qui opère.

Pl. V. On fera ensuite tourner tout l'instrument sur sa colonne jusqu'à ce que la révolution entière soit achevée, c'est-à-dire que le cercle soit à gauche; et pendant qu'un observateur ramènera la lunette inférieure dans la position horizontale, en faisant tourner tout le limbe, un autre observateur fera mouvoir la lunette supérieure, qu'il aura rendue libre, jusqu'à ce que l'objet soit exactement sur le fil horizontal. Lorsque la bulle restera au milieu du tube en même temps que le point de mire sera couvert par ce fil, on aura la seconde partie de l'observation, et l'arc parcouru par le vernier de cette lunette sera le double de la distance au zénith, cherchée.

En répétant plusieurs fois cette observation de la même manière, on parviendra au quadruple, au sextuple, etc.... de la distance au zénith, et l'on atténuera ainsi les erreurs de la division; mais

il faut toujours avoir soin de maintenir lo limbe dans une position verticale, et c'est à quoi l'on parvient en conservant l'horizontalité du petit niveau à l'aide des vis du pied de l'instrument. Il est utile aussi de diriger une de ces vis dans le plan de l'angle à mesurer; car dans la deuxième partie de l'observation on est obligé, pour placer horizontalement le grand niveau, de faire tourner le limbe autour de l'axe du cercle, et les filets de la vis qui produit ce mouvement étant trop espacés les uns des autres, il n'est guères possible d'amener exactement par ce moyen la bulle au milieu du tube; mais si la correction est légère, on la fait très-aisément avec la vis du pied ou de l'étrier *vee'* qui se trouve dans le plan de l'angle que l'on observe, et dont le mouvement, parconséquent, ne peut pas déranger le limbe de sa position verticale.

Toutes ces remarques ne seront bien saisies que lorsqu'on pourra les vérifier avec l'instrument lui-même, c'est pourquoi nous ne leur donnerons pas un plus grand développement (*); mais nous observerons qu'il convient pour plus d'exactitude, dans la mesure des distances au zénith, de placer successivement l'image du point de mire à droite et à gauche, et toujours à même distance du fil vertical; afin que la petite inclinaison de l'autre fil, si elle a lieu, ne cause aucune erreur sur la distance mesurée.

On conçoit en effet que si lors de la première partie de l'obser- Pl. V,
vation, le point de mire m paraît dans la lunette à la droite du fil n° 1.
vertical AV, il sera réellement entre ce fil et le limbe, puisque les objets sont vus renversés, et l'angle HAX représentera l'erreur commise sur la distance au zénith; mais la lunette se renversant dans la deuxième partie de l'observation, il s'ensuit que le fil AH sera incliné dans le même sens par rapport à celui qui opère. Si donc l'on place l'image du point de mire en m', c'est-à-dire à gauche du fil AV, et de manière que $Am' = Am$, la nouvelle erreur faite sur la distance au zénith sera $= xAh$, c'est-à-dire égale et de signe contraire à la précédente; ainsi il y aura com-

(*) Nous donnerons d'ailleurs à la fin de cet Ouvrage une plus ample explication de toutes les pièces qui composent le cercle répétiteur, et qui sont figurées en détail dans les gravures ci-jointes.

pensation, et le point de mire se retrouvera réellement entre le fil vertical et le limbe.

De l'usage du Cercle dans les observations astronomiques.

52. Les observations azimuthales se font en prenant la distance angulaire entre un astre voisin de l'horizon et un objet terrestre; la méthode que l'on emploie pour cet effet ne diffère pas de celle par laquelle on mesure un angle sur le terrein : il est seulement à remarquer, 1°. que le cercle a besoin d'être ramené sans cesse dans le plan variable des objets, parceque l'astre s'éloigne ou s'approche continuellement de l'horizon; 2°. et que l'on doit tenir compte de l'heure précise de la fin de chaque observation.

Si on observe une étoile, son diamètre est insensible et se réduit à un point lumineux, même dans les plus forts télescopes; mais la lumière de l'étoile et le feu établi à l'objet terrestre n'étant pas suffisans pour éclairer le champ des lunettes de manière à ce que l'on puisse bien distinguer les fils, on place une bougie près des objectifs. L'observateur qui est chargé de pointer sur l'astre ne le couvre pas exactement par le fil vertical, afin que l'autre observateur ait le temps de ramener sa lunette sur l'objet terrestre, dans le cas où il y aurait un petit écart. Ensuite l'un d'eux compte l'heure que la pendule marque à l'instant où l'étoile passe sur le fil.

Comme le mouvement de l'astre, par rapport au signal, est sensiblement uniforme pendant de courts intervalles de temps, on divise l'arc parcouru par le nombre des observations, et l'arc moyen qui en résulte est assez exactement la distance de l'astre au signal, pour l'instant moyen entre ceux de toutes les observations.

Si l'on observait le soleil, on interposerait un verre noir entre l'œil et l'oculaire de la lunette du cercle, afin de pouvoir fixer cet astre, et l'on mettrait alternativement en contact avec le fil vertical son bord oriental et occidental; alors l'arc simple déduit de l'arc multiple sera la distance du centre du soleil au signal. (Art. 60.)

S'il s'agit de mesurer la distance d'un astre au zénith, c'est encore par le procédé de l'art. 51 qu'elle s'obtient; ainsi l'arc parcouru par la lunette supérieure, divisé par le nombre des observations, donnera comme ci-dessus pour quotient un arc moyen qui, eu égard à l'uniformité de la marche de l'astre pendant de petits intervalles de temps, sera la distance au zénith, pour l'instant moyen entre ceux de toutes les observations. En mettant l'un après l'autre en contact avec le fil horizontal les bords supérieur et inférieur du soleil, ensorte que le fil vertical passe le plus près possible du milieu du disque de cet astre, la distance trouvée sera celle du centre du soleil au zénith.

Quand on observe pendant la nuit, on adapte ordinairement un *réflecteur F* à la lunette supérieure; c'est une petite plaque Pl.VI. de métal percée elliptiquement, et qui étant disposée convenablement, réfléchit dans la lunette les rayons de lumière qui proviennent de la bougie attachée à la fourche de l'instrument.

CHAPITRE IV.

De la correction à faire aux angles mesurés avec le cercle répétiteur, à raison de l'excentricité de la lunette inférieure.

53. Si, par l'axe de la lunette inférieure du cercle répétiteur, on fait passer un plan perpendiculaire à celui du limbe, ce plan ne passera pas par le centre de l'instrument, et sa distance à ce point est ce que l'on nomme *excentricité*.

FIG. 10 Au commencement de l'observation d'un angle ACB, on met la lunette supérieure fixée à zéro sur l'objet A à droite dans la direction CA; puis on dirige la lunette inférieure sur l'objet B à gauche; et comme celle-ci est éloignée du centre C de la distance CD, son axe optique, au lieu de passer par ce point, coïncide avec la droite DB.

Pour achever l'observation, on dirige la lunette inférieure sur l'objet A, en faisant tourner l'instrument sur son pivot; le point D, par ce mouvement, est transporté en D', et la lunette inférieure a son axe sur AD'. On amène ensuite la lunette supérieure sur l'objet B. Le mouvement donné au limbe de l'instrument est donc mesuré par l'angle DCD' et non par l'angle ACB.

Or

$$DCD' = ACD' - ACD = ACD' - (BCD - BCA);$$

mais

$$ACD' = (100^{gr} - A)$$
$$BCD = (100^{gr} - B);$$

donc

$$DCD' = (100 - A) - (100 - B) + BC.A$$
$$= BCA + B - A.$$

D'un autre côté, les triangles BCD, CAD' donnent respectivement

$$B = \frac{CD}{BC}, \quad A = \frac{CD'}{CA};$$

car à cause de la petitesse de ces angles, on peut prendre leurs arcs pour leurs sinus. Donc la lunette supérieure qui se trouvait d'abord dirigée sur A a été entraînée ensuite à droite hors de l'angle ACB, d'une quantité

$$DCD' = BCA + \frac{CD}{BC} - \frac{CD'}{CA};$$

donc pour la ramener en B, il a fallu lui faire décrire

$$2BCA + \frac{CD}{BC} - \frac{CD'}{CA};$$

donc en prenant la moitié de l'arc mesuré sur le limbe, on obtient

$$BCA + \frac{CD}{2BC} - \frac{CD'}{2CA} = \tfrac{1}{2}\ (\text{arc mesuré});$$

donc enfin

$$BCA = \tfrac{1}{2}\ (\text{arc mesuré}) + \frac{CD'}{2CA} - \frac{CD}{2BC}.$$

Soit e l'excentricité, $CA = D$ la distance de droite, $CB = G$ celle de gauche, on aura

$$BCA = \tfrac{1}{2}\ (\text{arc mesuré}) + \frac{\frac{1}{2}e}{D} - \frac{\frac{1}{2}e}{G}.$$

Dans les cercles que l'on construit maintenant, l'excentricité est à droite, c'est-à-dire, telle que nous l'avons supposée dans cette solution ; mais si elle était à gauche, e serait négative, et pour lors la correction serait de signe contraire.

Pour calculer la correction dont il s'agit, on réduira e en secondes (31), après avoir exprimé cette excentricité par la même unité dont on se sert pour les côtés des triangles. La correction cherchée sera donc

$$\frac{\frac{1}{2}e}{\sin 1''.D} - \frac{\frac{1}{2}e}{\sin 1''.G},$$

et on l'ajoutera à l'angle pris sur le limbe pour avoir l'angle ACB.

Delambre a donné cette correction pour différentes distances, et dans l'hypothèse que l'excentricité $e = 18$ lignes. Lorsque l'on visera à une très-grande précision, on formera une table semblable pour l'instrument que l'on aura adopté; mais nous devons avertir à cet égard que la correction ne s'étend pas au-dessus des dixièmes de secondes centésimales, quand les objets sont éloignés de 10,000 mètres, ce qui est souvent fort au-dessous de l'erreur de l'observation. Quant à la correction relative au cercle dont les deux lunettes seraient excentriques, voyez l'art. 59.

Il est facile de reconnaître que l'effet de l'excentricité de la lunette inférieure sur les trois angles d'un triangle, se réduit à zéro. En effet, si a, b, c sont les côtés d'un triangle, l'effet de l'excentricité sur chacun de ces angles sera, pour l'angle A,

$$\frac{\frac{1}{2}e}{c} - \frac{\frac{1}{2}e}{b},$$

pour l'angle B,

$$\frac{\frac{1}{2}e}{a} - \frac{\frac{1}{2}e}{c},$$

pour l'angle C,

$$\frac{\frac{1}{2}e}{b} - \frac{\frac{1}{2}e}{a},$$

d'où l'on voit que ces trois valeurs $= 0$.

CHAPITRE

CHAPITRE V.

De la réduction des angles d'un plan à un autre plan.

Réduction à l'horizon.

54. Il est rare que les angles observés soient situés dans le plan de l'horizon de l'observateur; mais comme dans le calcul des triangles, d'après lesquels on détermine la position respective des points d'une carte, on ne doit considérer que les distances horizontales, il est nécessaire de réduire au plan de celles-ci les angles des triangles.

Soit z le zénith de l'observateur qui du point C a observé FIG. 11
l'angle BCA incliné à l'horizon $B'CA'$. Cet angle aura pour réduction ou *projection horizontale* l'angle $B'CA'$ formé par les plans verticaux ACA', BCB', dans lesquels sont situés respectivement les signaux A, B.

Mais l'angle $B'CA'$ est le même que l'angle sphérique z du triangle zab formé par trois grands arcs, dont l'un za est la distance au zénith de l'objet A, l'autre zb, la distance au zénith de l'objet B, et le troisième ab, la mesure de l'angle observé BCA; donc si δ, δ' sont les distances au zénith connues za, zb, et que C soit l'angle observé BCA, on connaîtra les trois côtés du triangle sphérique abz : ainsi en se conformant à la notation actuelle, l'angle z sera donné par la formule de l'art. 25,

$$\sin \tfrac{1}{2} z = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{s}{2}-\delta\right)\sin\left(\frac{s}{2}-\delta'\right)}{\sin\delta \sin\delta'}},$$

s désignant la somme des trois côtés.

Soient

$$C = 65^{r},4560\,, \quad \delta = 86^{r},25\,, \quad \delta' = 85^{r},40\,,$$

l'opération par logarithmes sera

$\log\sin\left(\frac{s}{2}-\delta\right) = 32^{r},\ 303$	9.6865639
$\log\sin\left(\frac{s}{2}-\delta'\right) = 33\ ,\ 153$	9.6968322
$c.\log\sin\delta$	0.0102095
$c.\log\sin\delta'$	0.0125224
	19.4061280
$\log\sin\frac{1}{2}z$	$9.7030640 = 33^{r},6820$;

ainsi la projection de l'angle C est de $67^{r},3640$.

Les complémens positifs des distances au zénith se nomment *hauteurs* des objets, et les complémens négatifs des mêmes distances se nomment *dépressions*; parceque dans le premier cas les objets sont au dessus de l'horizon de l'observateur, et que dans le second cas ils paraissent au dessous.

Il est bien rare que les distances au zénith soient aussi petites que dans l'exemple ci-dessus; et si elles ne différaient de l'angle droit que de deux ou trois grades, la formule précédente deviendrait trop pénible à calculer, pour avoir avec exactitude la projection de l'angle observé: il vaut mieux alors chercher la réduction, qui n'est que de quelques secondes. Cette réduction s'obtient par la formule de l'art. 35.

Supposons qu'on ait observé un angle $C = 56^{r},9652$ entre deux objets dont les distances au zénith sont $\delta = 98\ ,2530$
$\delta' = 99\ ,0525$

et que H et H' soient les complémens respectifs de δ, δ', ou les hauteurs des objets au dessus de l'horizon de l'observateur; la formule (2) de l'article cité deviendra, en changeant α en H, β en H' et c en C,

$$x = \left(\frac{H+H'}{2}\right)^2 \frac{\tang\frac{1}{2}C}{R''} - \left(\frac{H-H'}{2}\right)^2 \frac{\cot\frac{1}{2}C}{R''}. \qquad (a)$$

Type du calcul.

$\delta = 98^{gr},2530$
$\delta' = 99\ ,0525$

$\delta + \delta' = 197^{gr},3055$

supplément ou $H + H'$. 2 ,6945 .... $\delta' - \delta$ ou $H - H' = 0^{gr},7995$

$\frac{H+H'}{2} =$ 1 ,3472 $= p$, $\frac{H-H'}{2} = 0,3997 = q$

1[er] terme positif.	2[e] terme négatif.
c.log R''... 4.19612	c.log R''... 4.19612
log p^2 ... 8.25886	log q^2 ... 7.20347
l.tang $\frac{1}{2}C$.. 9.68111	l.cot $\frac{1}{2}C$... 0.31889
$+$ 2.13609 $= 126''$,85	$-$ 1.71848 $= 50''$,30

Angle observé $56^{gr},965200$

réduction $\left\{\begin{matrix} +136''.83 \\ -\ 52.30 \end{matrix}\right\}$ $+$ 0 ,008453

angle réduit à l'horizon........... $56^{gr},973653$

La formule n'éprouverait aucun changement, quand même H et H' seraient deux dépressions, parcequ'elles y entreraient avec le signe moins; mais si H était une hauteur, et H' une dépression, la formule deviendrait, à cause de H' négatif seulement,

$$x = \left(\frac{H-H'}{2}\right)^2 \frac{\tang\frac{1}{2}C}{R''} - \left(\frac{H+H'}{2}\right)^2 \frac{\cot\frac{1}{2}C}{R''}. \qquad (b)$$

EXEMPLE.

l'angle observé $= 108^{gr},45256$

les distances au zénith $\delta = 98^{gr},354$
$\delta' = 101\ ,223$

$\delta + \delta' = 199\ ,577$

supplément ou $\frac{H-H'}{2}$ 0 ,423...... $\delta' - \delta$ ou $H + H' = 2^{gr},869$

$\frac{H-H'}{2}$....... $=$ 0 ,2115 $= p$ $\frac{H+H'}{2} = 1\ ,4345 = q.$

Continuant le calcul comme ci-dessus, on trouvera pour premier terme de la correction $+8'',0276$, et pour second terme, $-282'',93$; parconséquent l'angle réduit à l'horizon $=108^{gr},425070$.

En comparant cette opération avec la précédente, on voit que la formule (a) embrasse tous les cas, puisque le quarré de la moitié du supplément positif ou négatif de la somme des deux distances au zénith forme toujours le coefficient du premier terme, et le quarré de la moitié de leur différence, le coefficient du second terme; mais il faut avoir attention, dans ces calculs, de réduire H et H' en secondes, parceque R'' est employé dans cette supposition.

Si $H=H'$, la formule (a) se réduit évidemment à son premier terme, et celle (b) à son second terme; mais la correction peut être nulle dans trois cas, 1°. lorsque H et H' sont nuls à-la-fois; 2°. lorsque $\left(\frac{H+H'}{2}\right)^2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} C = \left(\frac{H-H'}{2}\right)^2 \cot^2 \frac{1}{2} C$, d'où $\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} C = \frac{H-H'}{H+H'}$; 3°. lorsque l'on a à-la-fois $H=0$ et $\operatorname{tang}\frac{1}{2}C = \cot\frac{1}{2}C$, circonstance qui ne peut avoir lieu que quand l'angle C est d'un quadrans.

Le calcul de la réduction dont il s'agit s'abrège beaucoup, au moyen des Tables I et II, qui ont été calculées et disposées de la même manière que celles que Delambre a données pour la division du cercle en 360 degrés. Cherchons, par exemple, la première réduction ci-dessus.

La Table I a pour argument l'angle observé, et l'on trouve avec cet angle $+30'',54$, $-132'',71$.

Avec l'angle $H+H'$, la Table II donne 4,48.

Avec l'angle $H-H'$, la même Table donne 0,394.

On multiplie $30'',54$ par le premier facteur 4,48, et le produit $+136'',62$ est le premier terme de la correction.

On multiplie de même $-132'',71$ par le second facteur 0,394, et le produit $-52'',29$ est le second terme de la correction.

La réunion de ces deux produits, qui sont toujours de signes différens, donne comme ci-dessus $+84'',53$, pour la réduction à l'horizon.

On conçoit aisément que lorsque les trois angles d'un triangle sont réduits à l'horizon, ils représentent ceux d'un triangle sphérique dont les côtés sont interceptés entre les verticales des trois signaux observés. Il ne s'agit plus alors, pour résoudre ce triangle très-peu courbe, que de faire usage du théorême de Legendre (39), si toutefois les observations ont été faites aux centres mêmes des signaux. Autrement, il faudrait réduire d'avance les angles horizontaux aux centres des stations, et c'est ce que nous enseignerons bientôt.

Réduction des angles horizontaux aux angles des cordes.

55. Nous avons indiqué dans l'article précédent la méthode par laquelle on calcule ordinairement un réseau triangulaire considéré comme faisant partie de la sphère terrestre. Cependant quelques géomètres, et Delambre notamment, réduisent les triangles sphériques aux triangles rectilignes formés par les trois cordes; et c'est par le moyen de ceux-ci qu'ils déterminent les distances respectives des objets. Cette dernière méthode, qui a tout le degré d'exactitude que l'on peut desirer, exige que l'on réduise d'abord les angles horizontaux aux angles des cordes, et que l'on substitue ensuite à la *ligne géodésique* prise pour base, la distance rectiligne qui joint ses extrémités (46). De ces deux problêmes, le premier se trouve résolu dans l'art. 28; car soit le triangle sphérique ABC qu'il faille réduire au triangle rectiligne $A'B'C'$; si FIG. 12
$2a$, $2b$, $2c$ sont les côtés du premier, opposés aux angles A, B, C, et $2a'$, $2b'$, $2c'$ les côtés du second, opposés aux angles A', B', C': que du point C, comme centre, on décrive avec un rayon $=1$, les arcs $z'\alpha'$, $z'\beta'$, $\alpha'\beta'$, et que l'on mène les tangentes ou horizontales CT, CT', l'angle de dépression $T'CB$ formé par une corde et une tangente, aura pour mesure a ou la moitié de l'arc connu AC. De même l'angle de dépression TCA sera $=b$.

Cela posé, l'arc $z'\beta'=1^q-a$, l'arc $z'\alpha'=1^q-b$ et l'angle horizontal TCT' est connu; ainsi dans le triangle sphérique $z'\alpha'\beta'$ on connaîtra deux côtés et l'angle compris : reste donc à trouver le troisième côté $\alpha'\beta'$, ou l'angle C' qui est l'angle horizontal, réduit à l'angle des cordes. Mais sans faire usage de

la formule citée, laquelle serait d'ailleurs peu propre à donner l'angle cherché avec précision, vu le peu d'étendue des tables de logarithmes, et même sans faire subir à cette formule une transformation analogue à celle qui a été pratiquée à l'art. 35, il est clair que la question à résoudre est l'inverse de la précédente. Si donc on dénote par y la correction cherchée, et par C l'angle horizontal connu, on aura (art. 35),

$$y = -\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{\tang \frac{1}{2} C}{R''} + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \frac{\cot \frac{1}{2} C}{R''}:$$

formule dans laquelle a et b sont toujours de même signe : pour en faire l'application, il faut commencer par calculer approximativement les côtés des triangles considérés comme rectilignes, en supposant que les observations ont été faites aux centres des signaux; ensuite convertir ces côtés $2a$, $2b$, en minutes centésimales.

Afin de nous conformer à la notation de l'art 106, nous désignerons respectivement les distances $2a$, $2b$ par K et K', et nous aurons, en employant à cette conversion la formule démontrée (80),

$$\varphi = \frac{K}{\rho \sin 1''}(1 - \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 L),$$

ou simplement pour toute la France,

$$\varphi = \frac{K}{\rho \sin 1''}(1 - \tfrac{1}{4} e^2).$$

D'ailleurs la Table III renfermant le logarithme du facteur de K, on aura sur-le-champ le logarithme de φ en ajoutant le log K avec celui de son facteur F.

Supposons, par exemple, que $\log K = 4,3821482$
$\log K' = 4,4137922$,

et que l'angle observé à la latitude de 54^{gr},
et réduit à l'horizon........................ $= 68^{gr},03346$,

la Table citée donnera 8,9986228, en prenant pour argument la latitude de 54^{gr}; d'où il suit que

$\log F = 8{,}9986228$	.... $8{,}9986228$
$\log K = 4{,}3821482$	$\log K' = 4{,}4137922$
$\log \varphi = 3{,}3807710$	$\log \varphi' = 3{,}4124150$

parconséquent,

$$\frac{\varphi}{2} \text{ ou } P = 12',01$$
$$\frac{\varphi'}{2} \text{ ou } P' = 12,92$$
$$P + P' = 24,93$$
$$P - P' = 0,91\,;$$

avec les quantités $P+P'$, $P-P'$, on trouvera dans la Table II les facteurs

	0,058	0,000.
Avec l'angle réduit à l'horizon, on trouvera dans la Tab. I, pour les nombres *tang* et *cotang*,	$-37'',68$	$+107'',65$
Multipliant ces quantités par ordre, on aura pour 1er et 2e termes de la correction,.....	$-\ 1'',43$	$+\ 0,000$

Or l'angle à l'horizon $=$........... 68^{gr},0334, 6
donc l'angle réduit au plan des cordes $=$. 68 ,0333,17.

Après avoir réduit ainsi tous les autres angles horizontaux, on résout les triangles de la chaîne à l'aide de la base mesurée et de ce principe de trigonométrie rectiligne, savoir, que les sinus des angles des triangles sont proportionnels aux côtés opposés: voyez à ce sujet l'art. 15.

Réduction d'un angle pris dans un plan à un autre plan incliné à l'horizon.

56. Le centre de l'instrument et le point de mire n'étant pas ordinairement les mêmes dans chaque station, c'est ce qui est, en partie, cause que les trois angles d'un triangle rectiligne diffèrent de deux angles droits. Si donc l'on ramenait au plan des trois centres des stations, les angles observés entre les sommets des signaux, ces angles ainsi corrigés serviraient à faire juger

du degré d'exactitude des observations; mais la réduction dont il s'agit pourrait aussi faire connaître l'effet de la réfraction terrestre (103) sur les angles observés.

FIG. 13 Soient deux signaux AA', BB' observés du signal zP. Si c, a, b sont les centres des stations, et que l'on ait relevé l'angle $AcB=c$, l'angle acb sera dans le plan des stations, et l'excès de l'angle horizontal sur l'angle observé sera, d'après l'art. 54.

$$x=p^2\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c-q^2\cot\tfrac{1}{2}c. \qquad (1)$$

L'angle acb étant très-peu différent de AcB, on aura de même

$$x'=p'^2\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c-q'^2\cot\tfrac{1}{2}c, \qquad (2)$$

x' désignant aussi l'excès de l'angle horizontal sur l'angle acb.

Maintenant il est évident que puisque $AcB+x=acb+x'$, on a

$$acb-AcB=x-x';$$

ainsi les équations (1) et (2) étant soustraites l'une de l'autre, il viendra pour l'expression de la différence cherchée,

$$x-x'=(p^2-p'^2)\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c-(q^2-q'^2)\cot\tfrac{1}{2}c. \qquad (3)$$

Mais si les angles sous lesquels on voit du point c les hauteurs Aa, Bb sont représentées par δH, $\delta H'$, les hauteurs angulaires des points de mire A et B au-dessus de l'horizon étant toujours désignées par H, H', on aura, par rapport aux hauteurs des points de station a, b,

$$p'=\tfrac{1}{2}(H+H')-\tfrac{1}{2}(\delta H+\delta H'), \text{ et } q'=\tfrac{1}{2}(H-H')-\tfrac{1}{2}(\delta H-\delta H').$$

D'ailleurs

$$p=\tfrac{1}{2}(H+H'), \quad q=\tfrac{1}{2}(H-H').$$

Donc si l'on fait pour abréger $p'=p-m$, $q'=q-n$, l'équation (3) deviendra, en y introduisant ces valeurs, et réduisant,

$$x-x'=m(2p-m)\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c-n(2q-n)\cot\tfrac{1}{2}c.$$

Enfin

Enfin convertissant en secondes et éliminant m et n, on aura

$$x-x'=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\delta H+\delta H'}{R''}\right)[H+H'-\tfrac{1}{2}(\delta H+\delta H')]\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\delta H-\delta H'}{R''}\right)[H-H'-\tfrac{1}{2}(\delta H-\delta H')]\cot\tfrac{1}{2}c.$$

Cette formule, comme nous l'avons déjà dit, peut servir à évaluer l'effet de la réfraction sur l'angle observé, et cela en y mettant pour δH et $\delta H'$ la valeur de cette réfraction déterminée *à priori* par la méthode de l'art. 105. Nous ne donnerons aucun exemple numérique à ce sujet; mais nous pensons que quelques lecteurs trouveront ici avec plaisir les règles des signes qu'il importe d'observer dans l'emploi des valeurs trigonométriques : les voici,

1°. Le produit de deux quantités est positif ou négatif, selon que ces quantités sont affectées du même signe ou de signes différens;

2°. Le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente d'un angle moindre qu'un droit sont positifs.

3°. Si un angle est compris entre 1 et 2 droits, son sinus est positif, et ses autres lignes trigonométriques sont négatives.

4°. Tout angle compris entre 2 et 3 droits a son sinus et son cosinus négatifs ; mais sa tangente et sa cotangente sont positives.

5°. Lorsqu'un angle est compris entre 3 et 4 droits, son cosinus est positif, et ses autres lignes trigonométriques sont négatives.

6°. Enfin le sinus d'un angle aigu négatif est lui-même négatif, et son cosinus est positif; donc à cause de $\operatorname{tang} = \frac{1}{\cot} = \frac{\sin}{\cos}$, la tangente et la cotangente de cet angle sont négatives.

CHAPITRE VI.

De la réduction des angles au centre de la station.

Centres visibles et accessibles.

57. TOUTES les fois que l'on observe au centre même de la station, on a immédiatement les angles sous lesquels on voit de ce point les distances qui joignent les extrémités des signaux; mais il arrive souvent que l'instrument ne peut être placé que hors de l'axe du signal pris pour centre de la station: dans ce cas, il est nécessaire d'y réduire les angles observés; et voici la méthode que l'on emploie pour cet effet.

FIG. 14 Soit C le centre de la station, et O celui de l'instrument ou le sommet de l'angle observé AOB. On demande la mesure de l'angle ACB qui est la réduction du premier.

Faisons les données

$$AOB=O,\ BOC=y,\ CO=r,\ BC=G,\ AC=D,$$

et l'angle inconnu $ACB=C$.

Puisque l'angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux intérieurs opposés, on a, par rapport au triangle IAO,

$$AIB=O+IAO,$$

et par rapport au triangle BIC;

$$AIB=C+CBO.$$

Egalant ces deux valeurs, on obtient

$$C=O+IAO-CBO.$$

D'un autre côté on a

$$\sin CAO = \frac{r \sin(O+y)}{D}, \quad \sin CBO = \frac{r \sin y}{G},$$

mais les angles CAO, CBO étant toujours fort petits, leurs arcs peuvent être pris pour leurs sinus; donc

$$C = O + r\frac{\sin(O+y)}{D} - \frac{r \sin y}{G},$$

et pour avoir la réduction en secondes, (31)

$$C - O = \frac{r \sin(O+y)}{D \sin 1''} - \frac{r \sin y}{G \sin 1''}. \qquad (1)$$

L'usage de la formule précédente ne peut, dans aucun cas, être embarrassant, pourvu que l'on ait égard aux signes de $\sin(O+y)$ et de $\sin y$; ainsi le premier terme de la correction sera positif si l'angle $O+y$ est compris entre o et 200^{gr}, et il deviendra négatif, s'il surpasse 200^{gr}; le contraire aura lieu dans les mêmes circonstances, pour le second terme qui dépend de l'*angle de direction* y.

Il est remarquable que D est la distance de l'objet à droite; et G la distance de l'objet à gauche. Quant à l'angle y, c'est toujours celui sous lequel paraissent le centre de la station et l'objet à gauche: ainsi quand on a mesuré l'angle AOB, la lunette supérieure est dirigée sur l'objet à gauche B, et l'inférieure sur l'objet à droite A: alors celle-ci restant fixe sur A, si l'on fait mouvoir la lunette supérieure de droite à gauche, jusqu'à ce que son axe réponde au point C, l'arc qu'elle aura parcouru sur le limbe sera la mesure de l'angle y, qui doit toujours se compter suivant l'ordre des divisions de l'instrument, et dont la valeur peut aller depuis o jusqu'à 400^{gr}.

La formule (1) se réduit à un seul terme, lorsque l'une des distances D, G est comme infiniment grande par rapport à r: ainsi selon que A ou B sera le centre d'un astre, on aura simplement

$$C - O = -\frac{r \sin y}{G \cdot \sin 1''}, \text{ ou, } C - O = \frac{r \sin(O+y)}{D \sin 1''}.$$

De plus, on aurait $C-O=0$, si A et B étaient deux objets célestes, ou bien si A étant un astre et B un objet terrestre, le centre O du lieu de l'observation était en même temps dans la direction G, *et vice versâ*, auquel cas $y=0$, ou $y=-O$.

Mais sans supposer infinie aucune distance D, G, on peut encore avoir $C-O=0$; alors

$$\frac{\sin y}{\sin(O+y)}=\frac{G}{D}:$$

d'un autre côté, dans le triangle ABC on a

$$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin A}{\sin(A+C)}=\frac{G}{D};$$

donc, à cause de $C=O$, on conclut

$$\frac{\sin y}{\sin(C+y)}=\frac{\sin A}{\sin(A+C)};$$

développant les dénominateurs il vient

$$\frac{\sin y}{\sin C\cos y+\cos C\sin y}=\frac{\sin A}{\sin A\cos C+\cos A\sin C};$$

ou bien

$$\frac{1}{\sin C\cot y+\cos C}=\frac{1}{\cos C+\cot A\sin C};$$

donc

$$\operatorname{tang} y=\operatorname{tang} A=\operatorname{tang}(200^{gr}+A).$$

Il suit de là que pour que l'angle réduit soit égal à l'angle observé, il suffit de se placer de manière à ce que $y=A$, ou $=200^{gr}+A$; c'est-à-dire, sur la circonférence du cercle circonscrit au triangle ABC. Pour éviter tout tâtonnement à cet égard, Delambre observe et démontre (page 24, Déterm. d'un arc du mérid.) que l'on peut se placer sur la tangente au cercle ABC, menée par le point C et le plus près de ce point qu'il sera possible, et même à plusieurs mètres sans inconvénient; mais pour cela il faut connaître l'un des angles A, B, afin de pouvoir déterminer la direction de la tangente.

Si plusieurs angles consécutifs O, O', O'', O''' étaient situés dans

un même plan, oblique à l'horizon, si l'on veut, on les réduirait tous au centre C, à l'aide du seul angle de direction y et de la distance au centre r: alors, par rapport à l'angle O', l'angle de direction serait

$$y' = y + O,$$

par rapport à O'',

$$y'' = y' + O' = y + O + O',$$

par rapport à O''',

$$y''' = y'' + O'' = y + O + O' + O''.$$

L'angle O''' étant censé achever le tour de l'horizon, la réduction qui lui convient doit être égale à la somme de toutes les autres réductions prises avec un signe contraire. Pour le prouver, soient ϵ, ϵ', ϵ'', ϵ''' les réductions correspondantes des angles O, O', O'', O''', on aura

$$C = O + \epsilon, \quad C' = O' + \epsilon', \quad C'' = O'' + \epsilon'', \quad C''' = O''' + \epsilon''';$$

d'où

$$C + C' + C'' + C''' = O + O' + O'' + O''' + (\epsilon + \epsilon' + \epsilon'' + \epsilon''').$$

Or, par hypothèse, les angles C, C'... aussi bien que les angles O, O'... font un tour d'horizon; donc l'équation précédente ne peut subsister, à moins qu'on n'ait

$$\epsilon + \epsilon' + \epsilon'' + \epsilon''' = 0;$$

donc

$$\epsilon''' = -(\epsilon + \epsilon' + \epsilon'').$$

Enfin, quand même les plans des angles O', O''... seraient différemment inclinés à l'horizon, les élémens y et r pourront seuls être employés, pourvu que l'angle O soit horizontal; mais avant de faire usage de la méthode actuelle, il faudra réduire à l'horizon les angles O', O''... Au surplus, quand les objets sont fort près de l'horizon de l'observateur, ainsi qu'il arrive toujours dans les triangulations du premier ordre, il est indifférent de réduire d'abord à l'horizon l'angle observé, ou de le réduire au centre de la station pour le ramener ensuite au plan horizontal.

58. Nous avons déjà indiqué comment on obtient l'angle de

direction ; cependant il est utile ici de faire connaître plus particulièrement le procédé que l'on suit dans cette circonstance. On détache la lunette supérieure pour la diriger sur le centre de la station, en fixant deux points marqués sur le haut du tube, l'un près de l'oculaire, l'autre près de l'objectif; mais la vis du réticule et celle de la petite pièce cylindrique qui entraîne le verre objectif, ont ordinairement assez de saillie au dessus du tube, pour servir de points de mire.

Supposons, pour fixer les idées, que cette lunette, au moment du départ, marque $9751^{gr},2$, et qu'arrivée dans la direction du centre après avoir marché de droite à gauche, c'est-à-dire suivant l'ordre des divisions du limbe, elle marque $10045^{gr},32$

Qu'au moyen d'un second mouvement donné à la même lunette, en la ramenant sur le centre de la station, elle réponde à........................ 10045 ,28

Qu'après un troisième essai tout semblable, elle marque.. 10045 ,30

Prenant le tiers de la somme de ces trois quantités, on aura.................................. 10045 ,30

De ce nombre retranchant celui du point de départ. 9751 ,20

La différence sera l'angle de direction y........ $=294^{gr},10$.

Il faut bien prendre garde, à chacun de ces essais, que l'instrument ne se dérange: l'on s'assure qu'il a gardé sa position primitive, lorsque l'axe optique de la lunette est resté dans la direction de l'objet à droite; s'il s'en était écarté, il faudrait l'y ramener en tournant la vis du tambour, et diriger de nouveau la lunette supérieure sur le centre de la station. Quelque attention que l'on prenne pour avoir la mesure exacte de l'angle de direction, il reste toujours à cet égard une petite incertitude; mais elle n'est d'ailleurs d'aucune conséquence. Il n'en est pas de même de la mesure de la distance du centre de l'instrument à l'axe du signal; celle-ci doit être prise avec beaucoup de soin, et l'on peut se servir à cet effet d'un cordeau que l'on dirige dans le sens de la lunette supérieure dont l'axe répond au centre de la station.

59. Passons maintenant au calcul de la réduction au centre, et pour cela donnons à l'équation (1) la forme

$$\epsilon = \frac{r}{\sin 1''}\left\{\frac{\sin(D+y)}{D} - \frac{\sin y}{G}\right\},$$

en faisant $\epsilon = C - O$.

Soit l'angle observé $O = 48^{gr},756$
l'angle de direction $y = 249,1$[illegible]
la distance au centre $r = 3^{m},257$
la distance de l'objet à droite $D = 17528^{m}$,
celle de l'objet à gauche $G = 20345$.

Ces deux dernières distances se calculent par approximation, ainsi qu'il a été dit (art. 55).

1er terme de la correction.		2e terme.	
$C.\log\sin 1''$	5,80388		
$\log r$	0,51282		
	+ 6,31670		— 6,31670
$L.\sin(O+y)$	— 9,89310	$L.\sin y$ ...	— 9,99807
$C.\log D$	5,75627	$C.\log G$	5,69154
— 92",483	— 1,96607	+ 101",465	+ 2,00631
Première partie......		— 92,483	
réduction.......		+ 8,982	
angle observé...		48gr,7560,	
angle réduit au centre...		48,7568,982.	

Quand on commence l'observation d'un angle avec le cercle répétiteur dans lequel l'excentricité des deux lunettes $= e$, on met comme à l'ordinaire la lunette supérieure fixée à zéro, sur l'objet à droite dans la direction AD': ensuite on amène la lunette inférieure sur l'objet à gauche dans la direction DB. L'opération se termine en dirigeant à son tour la lunette inférieure sur l'objet à droite, et la supérieure sur l'objet à gauche; desorte que la lunette supérieure parcourt le double de l'arc DD', et cet arc est la mesure de l'angle BEA formé par les axes des deux lunettes, puisque dans le quadrilatère $CDED'$ les angles D, D' FIG. 10

sont droits. Il s'agit donc de réduire au centre C l'angle mesuré BEA, pour avoir l'angle BCA, que l'on a en vue de connaître. Or à cause du triangle rectangle CED la distance au centre CE, ou $r = \frac{e}{\cos\frac{1}{2}C}$, et l'angle de direction BEC, ou $y = 100^{g} - \frac{1}{2}C$. On pourra donc employer la méthode que nous venons d'exposer pour effectuer cette réduction.

Centres invisibles des tours à bases circulaires.

60. Lorsqu'on observe au dehors ou au dedans des clochers, des tours, etc., leurs centres sont souvent invisibles ou inaccessibles. Voici les moyens les plus simples pour lever cet obstacle.

FIG. 15 Si l'on est placé en O extérieurement à la tour circulaire TzT', on mènera les tangentes OT, OT', sur lesquelles on prendra deux distances égales et arbitraires Ox, Ox', de manière cependant que la ligne xx' soit le plus près possible de la tour dont C est le centre : on fera $xm = x'm$, et Om sera évidemment dans la direction de ce centre. On mesurera alors l'angle $COB = y$, et à la distance Oz on ajoutera le rayon Cz pour avoir $CO = r$.

S'il était impossible de mesurer le rayon ou la circonférence du cercle TzT', on mesurerait l'une des tangentes, OT, par exemple, et l'on aurait

$$Oz = \frac{\overline{OT}^2}{Oz'};$$

puisque toute tangente au cercle est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie hors du cercle. Le reste de l'opération n'a maintenant aucune difficulté.

Il est à propos de remarquer que l'on peut avoir encore l'angle y sans connaître la direction de la sécante Oz'; car on a $COB = \frac{TOB + T'OB}{2}$; ainsi l'on fera coïncider d'abord l'axe de la lunette supérieure avec la tangente OT, ensuite avec la tangente OT', et l'on tiendra compte, chaque fois, du nombre de degrés marqué par cette lunette, qui doit toujours marcher de droite à gauche;

gauche : l'on opérera ensuite comme dans l'art. 58, pour trouver chacun des angles TOB, $T'OB$, dont la demi-somme $= y$.

Lorsque l'on sera placé dans l'intérieur d'une tour circulaire, on fera ensorte que le centre de l'instrument soit sur le milieu de la corde qui passe par ce point, et la perpendiculaire à cette corde sera la direction du centre de la tour. Tous ces procédés sont si simples, qu'il est inutile d'insister sur leur développement.

Centres invisibles des tours à bases polygonales.

61. Si l'on était en dehors de la tour rectangulaire DD', en O, FIG. 16 par exemple, et que de ce point l'on pût voir les extrémités de l'une des diagonales DD', dd', on aurait l'angle de direction $COB = y$ par la méthode suivante :

On mènera une droite parallèle à DD', en partageant en parties proportionnelles les côtés OD, OD' du triangle ODD', et le milieu de cette parallèle sera sur la direction OC.

Autrement on mesurera exactement la droite Op perpendiculaire à dD', ainsi que la partie pm comprise entre Op et la perpendiculaire Cm imaginée abaissée du centre de la tour sur le côté $d'D$. Comme Cm est censé connu, on aura mq par la proportion

$$Cm + Op : pm :: Cm : mq.$$

Ainsi la droite Oq, dont la direction est maintenant déterminée, passera nécessairement par le centre C; on mesurera donc Oq, et l'on aura

$$Cq = \sqrt{\overline{Cm}^2 + \overline{mq}^2},$$

et enfin

$$r = Oq + qC.$$

Ainsi les deux élémens de la réduction de l'angle observé en O sont connus.

Il est visible que ce dernier procédé est général pour tous les polygones réguliers, soit que l'on soit placé dans l'intérieur, soit que l'on se trouve au dehors, toute la difficulté consiste,

lorsque le centre est inaccessible, à déterminer l'apothême *Cm* du polygone qui l'entoure, et c'est ce que la géométrie enseigne. (Voyez aussi sur cet objet le Mémoire cité de Delambre).

Cependant s'il arrivait que l'on ne pût mener la perpendiculaire *Op*, on tirerait la droite *Om* et l'on éleverait à *Dp* une perpendiculaire vers le milieu de *pm*. La partie de cette perpendiculaire interceptée dans le triangle *COm* sera facile à déterminer par la théorie des lignes proportionnelles; on aura donc la direction du rayon *OC*, et ce moyen est aussi général que le précédent.

Il est évident que tout ce qui vient d'être dit relativement aux tours rondes ou polygonales, s'applique mot pour mot aux poutres verticales qui peuvent embarrasser le centre de la station.

CHAPITRE VII.

De la réduction au centre du signal observé, ou de la phase des signaux.

62. Lorsque les signaux sont éclairés obliquement par rapport à l'observateur, et qu'ils ne se terminent pas en pointe, les angles observés ont besoin d'une correction, parceque si le signal *abcd* est un parallélipipède, par exemple, et que *ab* en soit la face éclairée, le rayon visuel *OA* dirigé exactement sur le milieu de cette face ne passera pas par le centre *M* du signal, si *ab* n'est pas perpendiculaire à *AO*, et la correction additive ou soustractive sera égale à l'angle FIG. 17

$$AOM = \frac{AM \sin AMO}{AO}; \quad \text{(art. 15)}$$

Pour avoir cet angle en secondes on divisera son arc par sin 1", ou, ce qui revient au même, on le multipliera par R'' (31); donc la correction sera

$$AOM = R''. \frac{AM. \sin AMO}{AO}.$$

On voit bien à quoi serait égal l'angle $A'OM$, si l'on avait observé la face *bc*.

Pour plus d'exactitude, il faudrait en outre dégager l'angle *AOM* d'une très-petite correction due à une illusion d'optique qui résulte de ce que le rayon visuel dirigé du point *O* sur le milieu apparent de la face *ab* ne répond pas toujours exactement à son vrai milieu, ainsi qu'il est aisé de s'en convaincre; mais cette correction peut toujours se négliger, parcequ'elle tombe au-dessous de l'erreur de l'observation, surtout quand les côtés des triangles sont fort grands.

FIG. 20 63. Quand le signal est une tour ronde dont le centre est de même invisible, la correction est un peu plus longue à calculer, parcequ'il faut avoir recours à l'observation du soleil.

Soit, dans cette circonstance, CS le vertical du soleil, au moment de l'observation, c'est-à-dire, l'intersection du plan horizontal AMB avec le plan vertical dans lequel se trouve le centre du soleil. MS sera l'azimuth de cet astre, compté depuis midi. Le demi-cercle ASB sera entièrement éclairé, parceque les deux rayons lumineux qui sont tangens à la circonférence de la tour peuvent être considérés comme parallèles.

Je fais $MCO = MQ = x$, $MS = z$, et je mène DE perpendiculaire à OC.

Le demi-cercle $DAQE$ est celui qui se présente à l'observateur, supposé fort éloigné de C; mais l'arc AD étant privé de lumière, l'observateur ne verra de bien distinct que la partie $AQME$. J'abaisse AF perpendiculaire à DE, alors EF sera la *projection orthographique* de l'arc visible, qui paraîtra parconséquent comme la droite FE, et la ligne Oqc sera le rayon visuel que l'observateur dirigera sur le milieu apparent de l'arc visible $AQME$; ainsi l'on aura $Cc = \frac{DF}{2}$.

La ligne FE est plus petite que le diamètre DE, de la quantité $DF = \frac{\overline{AF}^2}{2CD}$; mais $AF = CD.\sin AD$, à cause du triangle rectangle AFC; parconséquent

$$DF = \frac{\overline{CD}^2.\sin^2 AD}{2CD} = \frac{CD.\sin^2 AD}{2} = 2CD \sin^2 \tfrac{1}{2} AD.$$

D'ailleurs, $AD = QS$, comme complément l'un et l'autre de l'arc AQ; donc

$$DF = 2CD \sin^2 \tfrac{1}{2} QS = 2r \sin^2 \tfrac{1}{2}(x - z);$$

donc

$$Cc = \frac{DF}{2} = r \sin^2 \tfrac{1}{2}(x - z).$$

D'un autre côté, le triangle rectangle OCc donne, en faisant

$OC = D$ et $COc = \theta$,

$$\tan g\,\theta = \frac{r \sin^2 \frac{1}{2}(x-z)}{D};$$

donc l'erreur de l'observation réduite en secondes sera

$$\theta = R''.\frac{r \sin^2 \frac{1}{2}(x-z)}{D}. \qquad (1)$$

Si le soleil et l'objet auquel on compare la tour sont du même côté, la correction est additive; s'ils sont de différens côtés, la correction est soustractive; enfin si $x > z$, le soleil est à droite de l'observateur: tout cela est évident.

Il ne reste plus, pour calculer la formule précédente, qu'à déterminer $x - z$; en voici le moyen:

On mettra le limbe du cercle dans une situation verticale, et après avoir fixé le mieux possible la lunette supérieure sur le centre du signal, on tiendra compte du nombre de degrés marqué par l'index du cercle azimuthal; ensuite on fera tourner l'instrument sur sa colonne, suivant l'ordre des divisions de ce cercle, pour amener la même lunette dans le vertical du soleil. L'arc parcouru par l'index sera dans tous les cas le supplément à deux angles droits de l'angle $x - z$; car par ce mouvement l'index a décrit l'arc de droite ou de gauche COS', dont le supplément est $QCS = x - z$; et il est visible que la position du soleil à l'égard de l'observateur tourné vers le signal, dépend de la grandeur de l'angle COS'; ainsi pour le cas de la figure le soleil est à droite.

Si l'instrument n'a point de cercle azimuthal, on le disposera horizontalement, et ensuite on dirigera sur le signal la lunette supérieure dont l'index est arrêté à zéro; on y amènera de même la lunette inférieure. L'instrument étant fixe dans cette position, on dirigera la lunette supérieure dans le vertical du soleil, au moyen d'un fil à-plomb placé près de l'objectif, et dont l'ombre devra se projeter sur la lunette dans le sens de son axe. L'arc parcouru sur le limbe sera l'azimuth COS' observé entre le soleil et le signal, ou le supplément à deux droits de l'angle $(x - z)$.

A la rigueur cet azimuth, au commencement de l'observation, n'est pas le même qu'à la fin, parceque le soleil s'approche ou s'éloigne continuellement du méridien du signal; mais pour un petit intervalle de temps le mouvement de cet astre peut être considéré comme uniforme. Donc si l'on prend un milieu entre les deux azimuths dont nous venons de parler, on aura l'azimuth pour le milieu de l'observation, et c'est celui qu'il faut employer pour plus d'exactitude.

EXEMPLE.

Supposons l'azimuth *COS′* pris avant l'observation . =	$175^{g},35'$
et pris aussitôt après l'observation .... =	175 ,65
L'azimuth pour le milieu de l'observation sera .... =	175 ,50
dont le supplément à deux droits	200 ,
sera la valeur de l'angle $(x-z)$ .... =	24 ,50

Maintenant si, dans la formule (1), on a $r = 4'',75$ et $D = 18432''$, on en obtiendra le résultat ainsi qu'il suit:

$\log R''$	5,80388
$\log r$	0,67669
$\log.\sin\frac{1}{2}(x-z)$	9,28157
idem	9,28157
$C\log.D$	5,73443
	$0,77814 = 6''$.

L'angle θ, ou la correction à faire à l'angle observé est donc $\pm 6''$. Le choix du signe est certain, d'après ce qui a été dit précédemment.

CHAPITRE VIII.

De la mesure des bases, des moyens de les ramener à une température unique et de les réduire au niveau de la mer.

64. La mesure des bases est une des opérations les plus délicates et les plus importantes de la Géodésie; parceque c'est de leur exactitude et de celle de l'observation des angles que dépend la détermination rigoureuse des distances. Il est essentiel que les bases soient, sinon les plus longues possibles, du moins en rapport avec les côtés des triangles auxquels elles appartiennent; qu'elles soient établies sur un terrain de niveau, ou plutôt que les lignes géodésiques qui les représentent soient droites, ou fassent partie des grands cercles de la terre; que leurs longueurs soient déduites d'une unité de mesure parfaitement connue et ramenée au même état de température; car on sait que les métaux, les bois, etc. passent par différens degrés de dilatation lorsque la température de l'atmosphère varie; enfin il importe que ces bases soient projetées sur une surface unique telles que celles de la mer.

Les astronomes français qui furent chargés de la grande opération relative à la fixation du mètre définitif, employèrent des règles de platine et de cuivre formant des thermomètres métalliques. Ces règles ne furent point mises en contact, dans la vue d'éviter le recul qui aurait pu avoir lieu par l'effet du choc; mais leur petit écart fut estimé par le moyen d'une languette graduée, comme on le verra bientôt.

Dans les opérations géodésiques ordinaires, on peut sans inconvénient mettre les règles ou les perches bout à bout. Cependant

il convient de mesurer plusieurs fois la même base, et de prendre pour vrai résultat le moyen entre toutes les mesures obtenues. On se sert avec avantage des verges de bois de sapin trempées dans l'huile bouillante, puis garnies d'un vernis épais, parcequ'elles sont peu sensibles aux variations hygrométriques de l'air, et même aux changemens de sa température. La figure 23 représente la forme
FIG. 21 d'une de ces verges; les branches du lozange *ABCD* et la traverse *CD* servent d'arcs-boutans à la règle *AB*, et l'empêchent parconséquent de se courber. On a au moins deux de ces verges que l'on étalonne avec beaucoup de soin, et à chacune desquelles on donne communément 5 mètres de long. Pour procéder à la mesure de la base, on les place sur un pont formé de plusieurs madriers calés solidement sur des trépiés, et placés alternativement les uns à la suite des autres à mesure que l'on s'avance sur cette base. Si les verges ne pouvaient avoir une station parfaitement horizontale, on mesurerait leur inclinaison à l'aide d'un niveau à perpendicule gradué
FIG. 19 comme le voit (fig. 19). On conçoit trop aisément de quelle manière il faut se servir de cet instrument et faire les réductions auxquelles il donne lieu, pour qu'il soit nécessaire de s'étendre à ce sujet. D'ailleurs l'ingénieur instruit saura suppléer à nos omissions, modifier selon les circonstances les moyens d'exécution que nous proposons, et donner aux instrumens à employer pour la mesure des bases toute la perfection dont ils sont susceptibles.

Nous avons déjà observé que l'influence du calorique sur les corps se manifeste par l'augmentation ou la diminution de leurs volumes, et l'on a trouvé que par chaque degré du thermomètre centigrade, le platine se dilate de 0,00000856̄5 dans chacune de ses dimensions, le fer de 0,0000106̄6̄6̄, et le cuivre de 0,0000178̄4̄3̄; mais pour l'objet actuel, la dilatation dans le sens de la longueur des règles est la seule qu'il importe de connaître, et il faut pour y avoir égard, tenir un registre des variations du thermomètre; alors la longueur de la base sera celle qui répondra à une température unique adoptée pour terme de comparaison.

Supposons, pour fixer les idées, que l'on se soit servi d'une règle de fer étalonnée à la température de 10° du thermomètre centigrade, sur la règle de platine qui, au terme de la glace fondante, représente le mètre. Supposons en outre que l'on ait mesuré avec

la règle en fer une longueur K à la température moyenne de $18°$, on saura combien cette longueur renferme de mètres ainsi qu'il suit.

Si on désigne par D et D' les rapports précédens des dilatations respectives du platine et du fer, et par $10 - x$ les degrés de la température à laquelle la règle de fer serait égale au mètre original; il est clair que le mètre en platine sera $= 1 - 10D$, et le mètre en fer $= 1 - xD'$, en prenant pour unité la longueur de l'étalon à la température de $10°$; ainsi $xD' = 10D$; et partant

$$x = \frac{10D}{D'} = 8°.$$

La base K sera donc exprimée en mètres, si on la divise par la longueur de la règle en fer ramenée à la température de $10 - x = 2°$, c'est-à-dire par la longueur actuelle de cette règle diminuée d'une quantité relative à $18° - 2° = 16°$; ainsi le nombre de mètres contenus dans la base K sera

$$\frac{K}{1 - 16° \times 0{,}000011} = \frac{K}{1 - 0{,}000176} = \frac{K}{0.999824}.$$

Donc une longueur égale à 10000 fois la règle en fer vaudrait $10001^m{,}75$; d'où l'on voit que quand les bases doivent être mesurées avec une extrême précision, il n'est pas permis de négliger les corrections dues à la température.

65. Il est sans doute beaucoup plus commode de choisir pour base une ligne droite, ou pour mieux dire une ligne exactement située dans un même plan vertical; mais il est des cas où cela est impossible. La base de Perpignan mesurée par Delambre, offre en effet l'exemple d'une ligne géodésique brisée, dont les extrémités étaient même à quelque distance des deux termes choisis pour centres des stations.

Soit ACB une ligne brisée; S, V les extrémités de la véritable base, SA et VB des droites respectivement perpendiculaires aux deux arcs sphériques AC, BC mesurés, et C l'angle horizontal que forment ces deux arcs. Le triangle ABC est réellement sphérique; ainsi il faudra, avant de calculer la distance AB pour en déduire ensuite VS, trouver l'excès sphérique de ce triangle (39), FIG. 28

retrancher de l'angle C le tiers de cet excès, et faire usage de la méthode (32) pour calculer la base AB et les angles CAB, CBA.

Si au contraire on adoptait le procédé de Delambre (46,69), on retrancherait de chacune des deux parties AC, BC de la base brisée l'excès qu'elles ont sur leurs cordes respectives, ainsi que nous allons le faire voir; on réduirait à ces cordes l'angle horizontal 55, et l'on prendrait pour base véritable la corde qui joint les points A et B, et qui s'obtient par la résolution d'un triangle rectiligne.

En désignant par b le côté d'un triangle sphérique très-peu courbe, pour une sphère dont le rayon $=1$, et par k la corde correspondante, on aura par la première des séries (A) art. 31,

$$b - 2\sin\tfrac{1}{2}b = b - k = \frac{b^3}{24}.$$

Lorsque B est la longueur d'un arc et K celle de sa corde, pour un rayon $=\rho$, on a évidemment

$$b = \frac{B}{\rho};$$

donc

$$b - k \text{ ou } \epsilon = \frac{1}{24}\frac{B^3}{\rho^3}.$$

Tel est l'excès de l'arc sur sa corde, dans la supposition que b fait partie du rayon pris pour unité; mais cet excès sera donné en mêmes mesures que le rayon de la terre, en multipliant par ρ la valeur de ϵ, c'est-à-dire qu'alors

$$B - K \text{ ou } \Sigma = \frac{1}{24}\frac{B^3}{\rho^2}.$$

enfin l'on aurait Σ en secondes, à l'aide de la formule

$$\frac{1}{24}R''\frac{B^3}{\rho^3}.$$

L'arc ou la corde AB, ainsi que les angles CAB, CBA étant déterminés par le moyen que l'on vient d'indiquer, on résoudra les petits triangles rectangles SAa, VBb, dans lesquels on con-

naîtra les angles et les hypoténuses SA, VB; et il ne s'agira plus, pour obtenir SV, que de calculer son excès sur $Va' = ba$; or dans le triangle rectangle $Sa'V$, on a $\overline{VS}^2 = \overline{Va'}^2 + \overline{Sa'}^2$, d'où

$$VS = Va'\left(1 + \frac{Sa'^2}{Va'^2}\right)^{\frac{1}{2}} = Va'\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{Sa'^2}{Va'^2}\right);$$

donc l'excès cherché, ou

$$VS - Va' = \tfrac{1}{2}\frac{(Sa')^2}{Va'},$$

sans erreur sensible.

66. Voici maintenant comment on réduit une base au niveau de la mer.

Soit ρ le rayon de la terre réputée sphérique pour le niveau de la mer; $\rho + h$ le rayon pour le sol de la base AMB, supposé de niveau, h sera l'élévation Aa du sol au-dessus de la surface des eaux. Soit de plus B la base mesurée AMB, et b la base réduite amb. FIG. 23

Cela posé, puisque les arcs semblables sont entr'eux comme leurs rayons, on aura

$$\frac{B}{b} = \frac{\rho + h}{\rho};$$

prenant la valeur de B, et ajoutant de part et d'autre $-b$, il viendra

$$B - b = \frac{Bh}{\rho + h} = \frac{\frac{Bh}{\rho}}{\left(1 + \frac{h}{\rho}\right)} = \frac{Bh}{\rho}\left(1 + \frac{h}{\rho}\right)^{-1},$$

puis développant la puissance négative, on aura

$$B - b = \frac{Bh}{\rho} - B\frac{h^2}{\rho^2} + B\frac{h^3}{\rho^3} - \ldots\ldots$$

Tel est l'excès de B sur b, et nous apprendrons dans l'art. 112 à déterminer h.

Tous les côtés des triangles que l'on calculera d'après la base réduite b, seront des arcs de grands cercles d'une même sphère.

Si au contraire on prend pour base la corde de l'arc b, ces côtés seront les arêtes mêmes d'un polyèdre inscrit dans la sphère dont le rayon $= \rho$.

Description et usage des règles de platine qui ont servi à la dernière mesure d'un arc du méridien.

FIG. 18 67. Les règles de platine dont nous avons déjà parlé à l'art. 64, sont au nombre de quatre; elles ont 12 piés de long sur 6 lignes de largeur environ, et une ligne d'épaisseur. Chacune est recouverte d'une règle de cuivre qui est de 6 lignes plus courte que la règle de platine; l'une et l'autre sont seulement fixées ensemble par une des extrémités, afin que la dilatation des métaux ne se manifeste que du côté de l'autre extrémité qui se trouve libre. On apprécie alors à chaque moment l'effet de la température par la quantité dont le cuivre se dilate plus que le platine : cette quantité ou différence des deux dilatations s'estime à l'aide des divisions ab tracées vers l'extrémité de la règle de cuivre, sur une petite pièce de ce métal, entraînée par la règle de platine. Chaque division est $\frac{1}{20000}$ de la longueur de la règle de cuivre, et le vernier n donne des parties dix fois plus petites, ou des 200 millièmes de la même longueur. Les divisions se lisent aisément, au moyen des loupes L, L'.

La languette cd est une petite règle de platine divisée aussi en 20 millièmes de la règle de même métal, assujétie à glisser entre deux rainures du côté du thermomètre métallique; elle sert à mesurer le petit intervalle qu'on laisse entre les règles lorsque l'on mesure une base, et son vernier est en n'. Pour préserver ces règles des accidens qui pourraient survenir dans le transport, et pour les rendre même plus propres à l'usage auquel elles sont destinées, chacune est enchâssée dans une pièce de bois de sapin, de manière à être maintenue constamment en ligne droite. Sur le petit
FIG. 19 toit TT' qui couvre le tout, sont deux pointes de fer pp', placées aux extrémités de chaque règle, et que l'on aligne dans la direction de la base, quand on opère.

Les trépiés sur lesquels on pose les règles, ont chacun à leurs angles des vis qui donnent le moyen d'élever ou d'abaisser ces règles pour pouvoir faire usage des languettes.

L'instrument ACB est une espèce d'équerre composée d'un arc de cercle gradué, et d'une branche de cuivre à laquelle, vers son milieu, est fixé un niveau à bulle d'air ef. Cet instrument se place sur chaque règle à la manière des maçons; et lorsque la verticalité de la branche est indiquée par le niveau, on écrit le nombre de degrés que marque la ligne de foi de l'extrémité de cette règle. On retourne ensuite l'instrument, et l'on remet la branche dans la situation verticale; alors l'arc qu'elle aura parcouru sera le double de l'inclinaison de la règle de platine.

On a reconnu par des expériences très-délicates et répétées avec beaucoup de soin (*), que le thermomètre métallique de la règle n° 1, marque 385^{part},3 à la température de la glace, et que l'alongement de chaque règle est de 0^{part},9245 pour une partie des thermomètres. Cela posé, si t' est le terme moyen de toutes les observations du thermomètre métallique de la règle n° 1, faite pendant la mesure de la base,

$$(t' - 385^p,3) \times 0,9245$$

sera la correction moyenne de température relative à cette règle prise pour *module* au degré de la glace, module que nous désignerons par M.

Les mêmes expériences ont fait connaître que la règle n° 2, exposée à la même température, est plus courte que la première, de 0,2, et que son thermomètre marquait alors 385^p,5; parconséquent la correction qui convient à cette règle est

$$(t'' - 385,5) \times 0,9245 - 0^p,2.$$

L'on a vu aussi que les corrections respectives des règles n° 3 et n° 4, sont dans les mêmes circonstances

$$(t''' - 380,5) \,.\, 0,9245 - 0^p,4;$$
$$(t^{IV} - 384,3) \,.\, 0,9245 - 0\,,4.$$

(*) Les résultats suivans que j'ai recueillis au dépôt général de la guerre, sont consignés dans un mémoire inédit de Borda, relatif aux expériences faites sur les règles de platine dont il s'agit.

Or en multipliant chacune de ces corrections par le nombre de fois que les règles correspondantes ont été portées sur la base, on aura la correction pour les quatre règles : mais ce résultat peut se trouver plus simplement ; car si t désigne le terme moyen des observations des quatre thermomètres, faites pendant la mesure de la base, la correction moyenne cherchée sera évidemment

$$(t - 383^p,8) \,.\, 0,9245 - 0^p,25 = P.$$

Les parties de cette expression exprimeront des deux cent-millièmes de la longueur fixe M.

Maintenant soit n le nombre de fois que les règles ont été employées dans la mesure de la base, on aura, pour la correction totale, nP; mais il faut encore corriger les petites distances d'une règle à l'autre, mesurées par les languettes ; et à cet égard, il s'agit de faire séparément une correction de température à chaque distance observée, et une autre correction des verniers, qui est la même pour toutes les distances. La première correction est toujours additive, la seconde s'est trouvée soustractive et $= - 0^p,15$.

La première correction pourrait être donnée au moyen d'une petite table qui aurait pour premier argument les parties de thermomètre métallique, observées pendant la mesure, et pour deuxième argument les parties données par les languettes. Si, par exemple, le thermomètre marquait 450^p, et la languette n° 1, 2000^p, la table de correction de température devrait donner $0^{p.m},6$. En effet on sait par ce qui précède que chaque règle s'alonge de 0,9245 pour une partie de son thermomètre ; parconséquent, pour $450 - 385,3 = 64^p,7$, elle s'alongera de 60^p ; et puisque la languette marque 2000^p, l'alongement rélatif à cette longueur sera le quatrième terme de la proportion suivante, dans laquelle le premier terme exprime la longueur de la règle

$$200000 : 2000 :: 60 : x = 0,6 ;$$

c'est ainsi que l'on formerait la table dont il s'agit.

Pour concevoir la raison de la seconde correction, il faut remarquer que la ligne de foi du vernier n° 1 ne tombait pas exactement sur le zéro de la division à l'instant du contact des règles,

puisqu'alors elle marquait $0^p,7$; la vraie distance de la règle n° 1 à la suivante doit donc être diminuée de cette quantité, ou ce qui est de même la correction du vernier n° $1 = -0^p,7$. Celles des trois autres verniers étant respectivement $+0,9$; -1; $+0,2$, il s'ensuit que le quart de ces quatre nombres, ou que la correction moyenne pour un vernier est, comme nous l'avons rapporté, $-0^p,15$.

Enfin on calculera, pour chaque règle, la correction de l'inclinaison à l'horizon ; puis l'on réduira toutes les distances horizontales partielles au niveau d'une des extrémités de la base, par exemple, et ensuite la longueur totale de cette base au niveau de la mer, comme nous l'avons expliqué plus haut.

Borda, à qui l'on doit les résultats précédens, fit aussi la comparaison de la toise de l'Académie avec la règle n° 1. Il trouva en dernière analyse que cette règle $= 2$ toises $+ 5^{part},4$, quand son thermomètre marque $386^{part},2$; qu'elle est $= 2$ toises $- 2^p$ lorsque le thermomètre marque $413,^p4$, et qu'à $16^\circ \frac{1}{4}$ du thermomètre centigrade, le thermomètre métallique indique $415,^p4$.

Il est donc aisé de déduire de là, par une interpolation, qu'à ce même degré de température choisi par Bouguer, pour étalonner les perches dont il fit usage au Pérou, la règle n° 1 $= M + 27^{part},8 = 2$ toises $- 2^{part},5$, et parconséquent que les 2 toises $= M + 30^{part},3$. (*)

Il ne reste plus qu'à trouver le nombre des toises contenues dans une base B exprimée en unités du module M, ou de la règle n° 1 rapportée à la température de la glace. Or les parties de M étant

(*) Le 21 floréal an 7, une commission de savans fut chargée de faire derechef la comparaison de la toise du Pérou avec les quatre règles de platine dont Delambre et Méchain s'étaient servi pour la mesure des bases de Melun et de Perpignan : elle reconnut, 1°. que ces quatre règles ajoutées bout à bout, forment une longueur égale à 8 fois celle de la toise du Pérou, à la température de $12^\circ.\frac{1}{2}$ de la division centigrade ; 2°. que la règle n° 1 est exactement le double de cette toise, à la même température.

des 200 millièmes de cette longueur, la double toise du Pérou, prise au degré de chaleur $16^\circ \frac{1}{4}$, vaut

$$1 + \frac{30,2}{200000},$$

en faisant $M = 1$. Elle sera donc contenue dans la base B un nombre de fois exprimé par

$$\frac{B}{1 + \frac{30,2}{200000}} = \frac{2000000\,B}{1999698}.$$

C'est à de pareils moyens qu'il faut recourir pour que les résultats d'une bonne triangulation puissent jeter du jour sur la véritable figure de la terre.

En 1784, pour mesurer la base d'Hounslowheat, des savans anglais employèrent avec beaucoup de succès des tubes de verre dont la dilation est moindre que celle de l'acier, du fer fondu et de toute espèce de cuivre. Les expériences qui furent faites à ce sujet firent même connaître qu'une verge massive de verre est plus dilatable qu'un tube de même matière. Mais ensuite ces savans jugèrent à propos de mesurer une base de vérification avec une chaîne d'acier parfaitement bien construite, aussi exacte et plus solide que les tubes de verre. Les deux bases, situées à 60 milles de distance l'une de l'autre, ayant été liées par un réseau de 24 triangles, il ne se trouva que 4 pouces $\frac{1}{2}$ de différence entre la mesure directe de l'une d'elles et le résultat du calcul. Néanmoins, jusqu'à présent, rien n'égale en exactitude les opérations géodésiques qui ont servi de fondement à notre système métrique.

CHAPITRE IX.

Du calcul des triangles.

Résolution des triangles sphériques très-peu courbes.

68. PUISQUE les bases mesurées et réduites à une même surface de niveau, sont ou peuvent être considérées comme des arcs de grands cercles de la sphère terrestre, et qu'elles sont liés à la chaîne des triangles de manière à en représenter les côtés principaux, il serait naturel de calculer ces triangles par la voie de la trigonométrie sphérique; mais comme leur courbure est peu sensible, il est moins laborieux de les traiter de même que les triangles rectilignes, en faisant toutefois usage du théorême de Legendre, démontré à l'art. 39. Lorsque les angles observés sont réduits à l'horizon de leurs sommets respectifs, et au centre (57); qu'ils sont corrigés de l'excentricité de la lunette inférieure (53), et de la phase des signaux (62), s'il y a lieu, ces angles sont réellement ceux des triangles sphériques dont il est question.

Il résulte de là que la somme des trois angles d'un triangle doit excéder deux angles droits, d'une quantité qui, en faisant abstraction de l'erreur des observations, est uniquement due à la courbure de la terre, et est précisément égale à la surface du triangle, réduite en secondes; mais pour calculer les différens côtés des triangles de projection ABC, BCD, etc.... on se contente, FIG. 24
en suivant le théorême cité, de retrancher le tiers de tout l'excès, de chacun des trois angles horizontaux affectés de l'erreur de l'observation, afin que la somme des angles restans soit de 200 grades ou de 180 degrés. Cependant il serait bon de modifier cette loi

de répartition dans le cas où la mesure de tel angle mériterait plus de confiance que celle de telle autre.

Voici maintenant le type du calcul.

Supposons que dans le triangle ABC, dont le côté $AB = 24107^{mèt},28$ est considéré comme la base mesurée et réduite au niveau de la mer, on ait pour les angles réduits à l'horizon.

$$A = 68^{gr},03346$$
$$B = 62,07068$$
$$C = 69,89616$$

Somme.......... $200,00030$

$200,$

Excès sur deux angles droits $= 0,00030$

Désignant par A', B', C' ces mêmes angles diminués chacun du tiers de cet excès, on trouve

$$A' = 68^{gr},03336$$
$$B' = 62,07058$$
$$C' = 69,89606$$

Somme $= 200$.

Cela posé, le triangle ABC, supposé rectiligne, se résoudra par la propriété démontrée à l'art. 15; on aura donc

$$\sin C' : AB :: \sin B' : AC,$$
$$\sin C' : AB :: \sin A' : BC,$$

et par logarithmes

$C.\log\sin C' = 0,0504811$ ...., $C.\log\sin C'$ $0,0504811$
$L.\ AB = 4,3821482$ .... $4,3821482$
$L.\sin B' = 9,9178747$ $L.\sin A'$ $9,9427811$
$\log\ AC = 4,3505040 = 22413^{m},20$ $\log\ BC$ $4,3754104 = 23736^{m},15$

Dans la pratique, on ne saurait mettre trop d'ordre dans les calculs, et chercher tous les moyens d'abréger les opérations: c'est dans cette vue que les ingénieurs disposeraient à peu près, ainsi qu'il suit, les données et les résultats précédens, dans des tableaux dont les titres sont imprimés d'avance.

NOMS des Signaux.	ANGLES HORIZONTAUX affectés de l'erreur de l'observation.	ANGLES HORIZONTAUX corrigés pour les calculs.	LOGARITHMES des sinus des angles.	CALCUL des côtés.	COTÉS en mètres.
				4,3821482	
A........	68^{gr},03346	68^{gr},03336	9,9427811	0,0504811	23736^{m},15
				9,9427811	
B........	62 ,07068	62 ,07058	9,9178747	4,3754104	22413 ,20
				4,4326293	
C........	69 ,89616	69 ,89606	9,9495189	9,9178747	24107 ,28
	200 ,00030	200 ,00000		4,3505040	

Les mètres qui sont sur la même ligne que *A*, expriment la longueur du côté opposé à cet angle, et ainsi des autres. On voit bien que le triangle *BCD* qui forme le second du réseau, et qui a pour base le côté *BC*, se calculerait de la même manière.

Nous n'avons nullement eu égard à l'excès sphérique qui se trouve renfermé dans les 3", c'est-à-dire dans la différence des trois angles *A*, *B*, *C*, à deux droits; mais il est nécessaire de le connaître pour pouvoir apprécier l'erreur de l'observation, et pour calculer les distances à la perpendiculaire et à la méridienne, comme on le verra bientôt. Afin de donner un exemple du calcul de cet excès qui, d'après l'art. 39, est $\epsilon = \frac{\alpha R''}{\rho^2}$, α dénotant l'aire du triangle sphérique, ρ le rayon de la terre, et R'' le nombre de secondes contenues dans le rayon, nous supposerons que l'angle *C*, et les deux côtés *a* et *b* sont donnés; savoir,

$$C = 120^{gr},289735$$
$$\log a = 4,6859571$$
$$\log b = 4,5434696$$

Mais avant de soumettre la formule précédente au calcul, nous remarquerons que $\frac{R''}{\rho^2}$ est une quantité constante, dans laquelle ρ et R doivent être exprimés par les mêmes unités qui ont été choisies pour la mesure des côtés et des angles des triangles; ainsi pour avoir le logarithme de l'excès sphérique exprimé en secondes, au logarithme de l'aire du triangle on ajoutera la quantité

$$(\log R - 2\log\rho).$$

Si l'on part des anciennes mesures,

$$\log\rho = 6{,}5140601, \quad \log R'' = 5{,}3144251,$$
$$\log R - 2\log\rho = 2{,}286305.$$

Si l'on fait usage des nouvelles mesures,

$$\log\rho = 6{,}8038801, \quad \log R'' = 5{,}8038801,$$
$$\log R - 2\log\rho = 2{,}1961199.$$

Enfin si les côtés du triangle sont exprimés en mètres, et que l'on emploie la division du cercle en 360°, on aura

$$\log R - 2\log\rho = 1{,}706665.$$

L'aire du triangle proposé, ou $\alpha = \frac{1}{2}ab\sin C$ (art. 39), étant calculée par les logarithmes, on aura, en vertu des données précédentes,

$$\begin{aligned}
\log \tfrac{1}{2} \text{ ou } 0{,}05 &= 9{,}69897\\
\log a &= 4{,}68596\\
\log b &= 4{,}54347\\
\hline
\log \alpha &= 8{,}92840\\
\text{log. constant} &= 2{,}19612\\
\hline
\log \varepsilon &= 1{,}12452 = 13'',32.
\end{aligned}$$

Ainsi le tiers de l'excès sphérique est $4'',44$, et l'angle C corrigé sera réduit à $C' = 120^{gr},289291$, il faudra donc résoudre un triangle rectiligne dans lequel on a les deux côtés a et b, comme ci-dessus,

et l'angle compris C'. Pour cet effet, on aura recours à la méthode de l'art. 16

$$\log a = 4{,}6859571 \qquad L.\text{tang}(\varphi - 50^{g}) = 9{,}2110910$$
$$C.\log b = 5{,}4565304 \qquad L.\cot \tfrac{1}{2} C = 9{,}8591844$$
$$\log \text{tang}\, \varphi = 0{,}1424875 \qquad \text{tang}\frac{A'-B'}{2} = 9{,}0702754$$
$$\varphi = 60^{g}{,}260945 \qquad \frac{A'-B'}{2} = 7^{g}{,}450177$$
$$\tfrac{1}{2}C' = 60\;{,}144645 \qquad \frac{A'+B'}{2} = 39\;{,}855355$$
$$100 - \tfrac{1}{2}C' = 39\;{,}855355 \qquad A' = 47\;{,}305532$$
$$B' = 32\;{,}405178$$

Maintenant le troisième côté c s'obtiendra à l'aide de l'équation $c = \frac{a \sin C'}{\sin A'}$,

$$\log a = 4{,}6859571$$
$$\log \sin C' = 9{,}9775601$$
$$C.\log \sin A' = 0{,}1696973$$
$$\log c = 4{,}8332145\,;$$

et pour preuve de l'opération, il ne s'agira que de calculer b ; on aura en effet

$$\log a + C.\log \sin A' = 4{,}8556544$$
$$\log \sin B' = 9{,}6878152$$
$$\log b = 4{,}5434696$$

ce qui est conforme à l'une des données du problème. Il résulte donc de ce calcul que les parties du triangle sphérique proposé, qu'il fallait trouver, sont

$$A = 47^{g}{,}305976$$
$$B = 32\;{,}405622$$
$$\log c = 4\;{,}8332145 \text{ ou } c = 68110^{m}{,}56.$$

Résolution des triangles rectilignes formés par des cordes de la sphère terrestre.

69. Nous avons exposé dans l'article précédent le principe d'après lequel on calcule une suite de triangles faisant partie de la surface du globe : cependant quelques géomètres et Delambre notamment, réduisent les triangles sphériques aux triangles rectilignes formés par les cordes qu'on imaginerait comprises entre les piés des signaux projetés, suivant la direction de la pesantenr, sur le prolongement de la surface de la mer. Cette méthode, qui est aussi très-rigoureuse, exige d'abord que l'on réduise les angles horizontaux aux angles des cordes (55), ensuite que l'on corrige les trois angles d'un même triangle de manière à ce que leur somme ne fasse que deux angles droits, et que l'on substitue à la ligne géodésique considérée comme base, la distance rectiligne qui joint ses extrémités (66). Du reste, le calcul est le même que ci-dessus. Comme nous sommes entrés dans assez de détails à ce sujet, nous nous bornerons à observer que la longueur des côtés les plus éloignés de la base mesurée doit être le milieu entre tous les résultats qui dériveraient du calcul des différentes chaînes de triangles auxquelles ces côtés seraient communs.

CHAPITRE X.

Du tracé et du calcul de la méridienne terrestre, et des perpendiculaires à cette méridienne.

70. En concevant un plan par l'axe de rotation de la terre, et par le zénith d'un lieu de sa surface, ce plan prolongé jusqu'aux limites de la sphère céleste, y tracera la circonférence d'un grand cercle qui sera le méridien de ce lieu. Tous les points de la surface de la terre qui auront leur zénith sur cette circonférence seront sous le même méridien céleste et formeront le méridien terrestre correspondant. Vu l'immense grandeur du rayon de la sphère étoilée, les verticales de tous ces points peuvent être censés parallèles au plan du méridien céleste; on peut donc définir le méridien terrestre une courbe formée par la jonction des piés de toutes les verticales parallèles au plan du méridien céleste. Cette courbe s'écarte de ce plan si la terre est un sphéroïde irrégulier, et alors elle est à *double courbure;* mais elle est toute entière dans ce plan, si la terre est un solide de révolution; car toutes les normales à la surface de ce solide rencontrant l'axe de rotation, celles qui passent par les points de la courbe génératrice sont nécessairement dans le plan de cette courbe, et parconséquent dans celui du méridien céleste.

Si par le moyen d'une lunette dirigée vers le pôle élevé, et par le procédé indiqué à l'art. 124, on place au loin vers le nord et vers le midi deux signaux dans l'axe optique de cet instrument, puis si l'on transporte la lunette à l'un de ces signaux, et qu'on la dirige sur le premier lieu de l'observateur pour faire placer d'autres signaux de la même manière, et ainsi de suite, la ligne menée par tous ces signaux sera la méridienne terrestre à laquelle on donnera autant d'étendue que le terrain pourra le permettre.

Au lieu de tracer effectivement cette ligne sur la surface de la terre, on emploie une construction qui fournit le même résultat: voici en quoi elle consiste.

FIG. 24 Soit *ABCDE....* une chaîne de triangles, étendue dans le sens du méridien, et dont les côtés, calculés par la méthode de de l'art. 68, sont des arcs du sphéroïde terrestre. Supposons que l'on connaisse par l'observation l'azimuth ou l'inclinaison du côté *AC* sur le premier côté *AM* de la méridienne, et l'on trouvera, par la trigonométrie, le point *M* où cette courbe rencontre le côté *BC*. Les points *A*, *B*, *C* étant dans un même plan horizontal, la ligne *AM* sera de même dans ce plan; mais à cause de la courbure de la terre, le prolongement *MM'* de cette ligne se trouvera au-dessus du plan du second triangle horizontal *BCD*: si donc, sans changer l'angle *CMM'*, on rabat la ligne *MM'* sur le plan de ce second triangle, en la faisant tourner autour de *BC* comme axe, le point *M'* décrira un très-petit arc de cercle qui pourra être considéré comme une droite perpendiculaire au plan *BCD*; d'où il suit que l'opération se réduit à plier le côté *MM'* suivant une verticale, et à calculer la distance *AM'* pour trouver la position du point *M'*. En pliant ainsi de proche en proche les parties de la méridienne sur les triangles horizontaux correspondans, on aura, à l'aide du calcul, la direction et la longueur de cette méridienne, depuis une extrémité de la chaîne des triangles jusqu'à l'autre.

Une ligne tracée ainsi qu'il vient d'être dit, ou déduite des mesures trigonométriques, par le moyen que l'on vient d'indiquer, se nomme *ligne géodésique:* elle a la propriété d'être la plus courte que l'on puisse mener entre ses deux extrémités sur la surface de la terre, et elle y mesure parconséquent la distance itinéraire des lieux. A la rigueur, cette courbe diffère un peu du méridien terrestre, et c'est un fait dont il est facile de se rendre raison; car pour que la ligne que déterminent les opérations géodésiques coïncidât avec le méridien terrestre, il faudrait que les verticales des points *A*, *M*, *M'*, *M"* fussent parallèles au plan du méridien céleste; c'est-à-dire à celui qui passe par la verticale du lieu *A* et par l'axe du monde; circonstance qui n'a pas lieu lorsque

lorsque la terre n'est pas un solide de révolution : cependant dans l'état actuel des choses, la différence entre les deux courbes dont il s'agit est si petite qu'il est inutile d'y avoir égard.

71. Maintenant si on imagine un cercle perpendiculaire au méridien céleste, et passant par la verticale du lieu de l'observateur, il représentera le premier vertical de ce lieu. La suite de tous les points de la surface de la terre, qui auront leur zénith sur la circonférence de ce cercle, formera la perpendiculaire à la méridienne, que l'on tracera absolument comme la méridienne elle-même.

Dans la sphère, les perpendiculaires à la méridienne sont des grands cercles qui se coupent tous, sur l'équateur, en deux points diamétralement opposés; mais dans l'ellipsoïde de révolution, et à plus forte raison dans le sphéroïde irrégulier, ces perpendiculaires concourantes sont des courbes à double courbure. En effet, soit A un lieu situé entre le pôle et l'équateur, et ABB'....... FIG. 25 la perpendiculaire à la méridienne PA; le premier côté AB de cette ligne sera dans le plan AMB déterminé par la verticale AM et par le côté AB. De même le second côté BB' sera dans le plan BNB', BN étant la verticale du point B : or on verra à l'art. 79, que $CM > CN$, la verticale BN sera donc inclinée sur le plan AMB; il en sera de même de la ligne BB' qui représente le prolongement de AB, plié suivant une droite parallèle à BN. On prouverait pareillement que $B'B''$ s'écarte du plan BNB', et ainsi de suite; donc les quatre points A, B', B'', B''' ne sont pas dans un même plan; donc enfin la perpendiculaire à la méridienne est en général une courbe à double courbure.

Quelle que soit la nature du sphéroïde terrestre, les parallèles à l'équateur sont des courbes dont tous les points sont à la même latitude : sur le sphéroïde de révolution, ces courbes sont planes et circulaires.

72. La situation d'un lieu est déterminée, lorsque l'on connaît la perpendiculaire à la méridienne, ou le parallèle sur lequel il se trouve, et sa position sur cette perpendiculaire ou ce parallèle. Lors donc que tous les triangles qui forment le canevas d'une carte géographique ont été calculés et orientés d'après les prin-

cipes exposés précédemment, on obtient les positions respectives des sommets de leurs angles, par le moyen de leurs coordonnées ou de leurs distances à la méridienne et à la perpendiculaire du lieu principal. Voici comment on calcule ces distances.

FIG. 24 Supposons que les triangles ABC, $BCD\ldots$ fassent partie d'une chaîne quelconque d'autres triangles dont les côtés soient des arcs de grands cercles d'une sphère ayant pour rayon la distance du niveau de la mer au centre de la terre (66), et que l'on connaisse par l'observation l'angle CAX qui mesure l'azimuth z du côté AC, ou son inclinaison par rapport à la méridienne AX; on calculera par la méthode de l'art. 68 l'excès sphérique ϵ propre au triangle rectangle AcC, et l'on établira ensuite ces deux proportions pour trouver Ac, Cc,

$$\sin(100^{gr} - \tfrac{1}{3}\epsilon) : \cos(z - \tfrac{2}{3}\epsilon) :: AC : Ac = x$$
$$\sin(100^{gr} - \tfrac{1}{3}\epsilon) : \sin(z - \tfrac{1}{3}\epsilon) :: AC : Cc = y,$$

L'azimuth de AB est connu immédiatement à cause de $BAX = CAB - CAX$, et si on calcule l'excès sphérique propre au triangle ABM', on aura

$$AM'B = 200^{gr} - M'AB - ABM' + \epsilon.$$

Pour déterminer les côtés AM', BM', il faudra ôter de chacun des angles du triangle ABM' le tiers de ϵ, et l'on aura ces deux proportions,

$$\sin(200^{gr} - A - B + \tfrac{2}{3}\epsilon) : \sin(B - \tfrac{1}{3}\epsilon) :: AB : AM'$$
$$\sin(200 - A - B + \tfrac{2}{3}\epsilon) : \sin(A - \tfrac{1}{3}\epsilon) :: AB : BM',$$

en désignant respectivement par A, B les angles $M'AB$, ABM'.

On connaîtra donc dans chacun des triangles rectangles AbB, $M'dD$, deux angles et l'hypothénuse, c'est-à-dire tout ce qu'il faut pour déterminer les côtés Ab, bB, et $M'd$, dD. Donc les distances des points B, D à la méridienne et à la perpendiculaire seront connues.

Traitant de la même manière le triangle ACN ou $M'DN$, pour avoir AN et DN, prolongement de CD, et ensuite le triangle

DNF, pour connaître le côté *NF* et les angles *DNF*, *DFN*, il sera facile de calculer les coordonnées du point *F*.

La distance *fF* et les angles *DFN*, *NFf* étant connus, on aura

$$fFP = 200 - EFD - DFN - NFf;$$

car tous les angles horizontaux autour d'un même point de station valent quatre angles droits : ainsi dans le triangle rectangle *fFP* on connaîtra deux angles et un côté, on pourra donc calculer l'excès sphérique qui lui convient, l'angle *FPf* et les côtés *fP*, *FP*. Résolvant ensuite le triangle rectangle *cEP*, on aura de même la position du point *E* à l'égard de la méridienne *AX* et de sa perpendiculaire *AY*, c'est-à-dire les distances *Ec*, $Ac = AP - cP$. Il est nécessaire, avant tout, de figurer, d'après l'échelle, la chaîne des triangles observés, afin de voir si ceux tels que *ACN*, *M'EP*, etc. que l'on forme pour faciliter le calcul des distances à la perpendiculaire et à la méridienne, n'ont pas des angles trop obtus ou trop aigus.

Telle est en peu de mots la méthode de calcul que l'on doit suivre lorsque l'on a principalement en vue de trouver la longueur de la méridienne comprise entre deux points tels que *A* et *X*. On voit que l'on détermine en même temps les azimuths d'un grand nombre de côtés de la chaîne; on peut donc vérifier si les azimuths conclus de la série des triangles s'accordent avec ceux qui résultent de l'observation.

73. Les géographes emploient pour calculer les distances à la méridienne et à la perpendiculaire, un procédé un peu plus commode et qu'il importe de faire connaître, malgré qu'il ne soit pas aussi rigoureux que le précédent. Ils mènent par tous les sommets des triangles des parallèles à la méridienne et à la perpendiculaire; par ce moyen, les côtés de ces triangles deviennent les hypothénuses des triangles rectangles qu'ils calculent en partant de l'azimuth connu et sans tenir compte de l'excès sphérique, parcequ'ils considèrent tous les triangles de la chaîne comme décrits sur une surface plane. Par exemple, la résolution des triangles rectangles *APM*, *AP'M'* donnera les coordonnées *xy*, FIG. 26
x'y' des points *M*, *M'*. La résolution du triangle *M'M''b* fera de

Q 2

même connaître les distances bM'', bM', et comme les coordonnées du point M'' sont $x''y''$, on aura

$$x'' = AP' + bM', \qquad y'' = P'M' - bM''.$$

Pareillement, lorsque l'on aura calculé les distances dM'', dM''', on aura

$$x''' = AP'' + dM'', \qquad y''' = P''M'' + dM''',$$

et ainsi du reste.

C'est de cette manière que les distances des lieux de la France, à la méridienne et à la perpendiculaire, qui passe par l'Observatoire de Paris, ont été calculées par Cassini. Nous ne nous arrêterons pas à montrer comment on détermine les angles aigus des triangles rectangles $M'bM''$, $M''dM'''$..... parceque cette opération ne présente aucune difficulté; mais nous observerons que lorsque l'on enregistre les distances à la méridienne et à la perpendiculaire, il importe d'indiquer le sens dans lequel elles doivent être prises; et à cet égard on peut adopter la convention établie dans la théorie des courbes, relativement aux signes.

Nous verrons dans le chapitre XII une méthode qui remplit le même objet que la précédente, et qui dispense de construire une figure.

CHAPITRE XI.

Recherche des formules pour exprimer en fonction de la latitude, différentes parties du méridien de la terre supposée une ellipsoïde de révolution, et applications de ces formules.

74. SOIT CE le rayon de l'équateur, et P le pôle. Si par le point A on mène la tangente AT à l'arc elliptique BAE, la droite AM, perpendiculaire sur AT sera la normale en ce point, et l'angle $ALT = FAT$ sera la latitude du point A. FIG. 27

L'équation à l'ellipse est $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$; et pour le point A, dont les coordonnées sont x', y', on aura

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2.$$

Au même point A, l'équation de la normale AL est

$$y - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x');$$

et si l'on y fait $y = 0$, on aura l'abscisse CL, ou

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a^2}x';$$

de là il est aisé de conclure que la normale $AL = n$ a pour valeur

$$n = \frac{b}{a}\left[b^2 + \frac{a^2 - b^2}{b^2}y'^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $ALF = L$; on aura $y' = n \sin L$, et parconséquent

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2}\left[b^2 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} y'^2\right] \sin^2 L\,;$$

d'où l'on tire

$$y'^2 = \frac{b^4 \sin^2 L}{a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2 L} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)\,;$$

de là

$$n = \frac{b^2}{a}\left[1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2 L\right]^{-\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Si, dans ce résultat, l'on fait pour abréger $a = 1$ et $\frac{b}{a} = b'$, on aura $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$, ou $1 - b'^2 = e^2$, e désignant l'excentricité; ainsi

$$n = (1 - e^2)\left[1 - e^2 \sin^2 . L\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots (3)$$

et l'équation (1) deviendra

$$AF = y' = \frac{(1 - e^2)\sin L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Dans la même hypothèse, l'équation de l'ellipse se change en

$$y'^2 = (1 - e^2)(1 - x'^2)\,;$$

donc au moyen de l'équation précédente,

$$CF = x' = \frac{\cos L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

telle est la valeur du rayon du parallèle à la latitude L.

Par la même raison, la valeur de CL, trouvée plus haut, se change en

$$CL = e^2 x'\,;$$

mais x' est donnée par l'équation (5), donc

$$CL = \frac{e^2 \cos L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Toutes les valeurs que nous venons d'obtenir sont relatives au grand axe de l'ellipse pris pour la ligne des x; et si l'ellipse

était rapportée à son petit axe, la méthode de calcul précédente conduirait de même aux valeurs des lignes AM, CM, etc. Pour le prouver, soit

$$a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2$$

l'équation de l'ellipse, dont le petit axe CP représente maintenant la ligne des x. Si l'on fait la normale $AM=n'$, on aura visiblement pour le point A,

$$y^2=n'^2\cos^2 L;$$

mais si dans l'équation (2) on change a en b, *et vice versâ*, et sinus en cosinus, on aura

$$AM=n'=\frac{a^2}{b}\left[1-\left(\frac{b^2-a^2}{b^2}\right)\cos^2 L\right]^{-\frac{1}{2}};$$

et puisque l'on a $b=b'$ lorsque $a=1$, il s'ensuit que

$$n'=\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{e^2}{1-e^2}(1-\sin^2 L)\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}\ldots\ldots(7)$$

D'un autre côté, $y^2=n'^2\cos^2 L$; donc

$$y^2=\frac{\cos^2 L}{1-e^2\sin^2 L};$$

et comme l'équation actuelle de l'ellipse donne $y^2=\frac{(1-e^2)-x^2}{1-e^2}$, on aura en égalant ces deux valeurs,

$$x^2=\frac{(1-e^2)^2\sin^2 L}{1-e^2\sin^2 L}.$$

De plus, nous avons trouvé précédemment que $CL=\frac{a^2-b^2}{a^2}x'$; ainsi, dans le cas présent, nous aurons

$$CM=\frac{b^2-a^2}{b^2}x=\frac{-e^2}{1-e^2}x.$$

Substituant pour x sa valeur tirée de l'équation précédente, nous obtiendrons

$$CM = \frac{-e^2 \sin L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} = -e^2 n' \sin L \ldots\ldots\ldots (8)$$

Quant à la valeur de AC, elle est évidemment représentée par $\sqrt{x^2 + y^2}$; ainsi, soit que l'on fasse usage des valeurs ci-dessus de x^2, y^2, soit que l'on ait recours aux équations (4) et (5), on aura

$$AC = r = \left[1 - \frac{e^2(1-e^2)\sin^2 L}{1 - e^2 \sin^2 L}\right]^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Cette dernière formule est susceptible de prendre une forme plus simple, et voici comment :

Si on imagine une sphère circonscrite à l'ellipsoïde, laquelle ait pour rayon celui de l'équateur, l'angle $CaE = FaT = \lambda$ sera la latitude du point a dans la sphère; or les points a et A ont la même abscisse CF; donc, si l'on fait $AF = y'$ et $aF = y''$, les équations du cercle et de l'ellipse seront respectivement

$$y''^2 = 1 - x^2,$$
$$y'^2 = b'^2(1 - x^2);$$

d'où l'on tire, en éliminant x^2,

$$y'^2 = b'^2 y''^2.$$

Mais aF est le sinus de λ, puisque $aC = 1$; donc

$$\sin^2\lambda = \frac{(1 - e^2)\sin^2 L}{1 - e^2 \sin^2 L};$$

de là l'équation (9) devient

$$AC = (1 - e^2 \sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Maintenant pour trouver la valeur de λ on divisera l'une par l'autre les équations des deux courbes précédentes, et l'on aura

$$\frac{y'}{y''} = b';$$

mais la seule inspection de la figure 27 fait voir que $\frac{y'}{FT} = \frac{1}{\text{tang}\, L}$.
et

et que $\frac{y''}{FT} = \frac{1}{\tang \lambda}$; parconséquent

$$\frac{y'}{y''} = \frac{\tang \lambda}{\tang L}.$$

Il résulte donc des deux valeurs de $\frac{y'}{y''}$, que

$$\tang \lambda = b' \tang L;$$

or si B est un angle tel que $\cos B = b'$, on a $1 - b' = 1 - \cos B = 2\sin^2 \frac{1}{2} B$, $\tang \lambda = \cos B \tang L$, et $2\cos^2 \frac{1}{2} B = 2 - 2\sin^2 \frac{1}{2} B = 1 + b'$, donc

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{1 - b'}{1 + b'};$$

et l'on obtient sur-le-champ, en faisant usage de la formule de l'art. 34,

$$L - \lambda = \tang^2 \tfrac{1}{2} B \sin 2L - \tfrac{1}{2} \tang^4 \tfrac{1}{2} B \sin 4L + \tfrac{1}{3} \tang^6 \tfrac{1}{2} B \sin 6L \text{ etc.};$$

donc

$$L - \lambda = \left(\frac{1 - b'}{1 + b'}\right) \sin 2L - \tfrac{1}{2} \left(\frac{1 - b'}{1 + b'}\right)^2 \sin 4L + \tfrac{1}{3} \left(\frac{1 - b'}{1 + b'}\right)^3 \sin 6L - \text{etc.}$$

Delambre rend cette série très-convergente, en y introduisant le rapport des axes de l'ellipse : soient, par exemple, m et n les deux nombres qui expriment ce rapport, on aura $b' = \frac{n}{m}$, et

$$\frac{1 - b'}{1 + b'} = \frac{m - n}{m + n} = \frac{1}{m + n};$$

car ordinairement on prend pour m et n deux nombres qui ne diffèrent que de l'unité; donc

$$L - \lambda = \left(\frac{1}{m + n}\right) \sin 2L - \tfrac{1}{2} \left(\frac{1}{m + n}\right)^2 \sin 4L + \tfrac{1}{3} \left(\frac{1}{m + n}\right)^3 \sin 6L - \text{etc.} \quad (11)$$

Nous verrons bientôt que $m = 334$, et $n = 333$; ainsi le premier terme de cette expression peut suffire.

Pour parvenir à l'expression du rayon de courbure du méridien, on se rappellera que ce rayon, dans toutes les courbes du second ordre, est égal au cube de la normale n, divisé par le quart

du quarré du paramètre p (Calcul différent. de Lacroix, pag. 123); ainsi en désignant par R le rayon de la développée pour la latitude L, on aura

$$R=\frac{n^3}{\frac{1}{4}p^2}=\frac{(1-e^2)^3(1-e^2\sin^2 L)^{-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4}p^2}:$$

mais $\frac{1}{4}p^2=\frac{b^4}{a^2}=(1-e^2)^2$; donc

$$R=(1-e^2)(1-e^2\sin^2 L)^{-\frac{3}{2}}\dots\dots\dots\dots(12)$$

Si on voulait donner à cette expression une forme dépendante de *l'aplatissement* ou de l'ellipticité de la terre, c'est-à-dire, de la différence α des demi-axes; celui de l'équateur étant toujours pris pour l'unité, soit d'abord

$$\frac{a-b}{a}=\alpha,$$

on aura à cause de $1-b'^2=e^2$ et de $b'=1-\alpha$,

$$e^2=1-(1-\alpha)^2=2\alpha-\alpha^2:$$

de là

$$R=(1-2\alpha+\alpha^2)\{1-(2\alpha-\alpha^2)\sin^2 L\}^{-\frac{3}{2}}$$

développant la puissance négative indiquée, et rejetant les puissances secondes et ultérieures de α, on aura à fort peu-près,

$$R=1-\alpha(2-3\sin^2 L). \qquad (12')$$

Passons maintenant à la rectification d'un arc du méridien, et pour cet effet désignons par S cet arc compris entre l'équateur et le point dont la latitude $=L$; sa différentielle sera

$$dS=\sqrt{dx'^2+dy'^2}=dx'\sqrt{\frac{1-e^2x'^2}{1-x'^2}};$$ (*Calc. diff. L. C. p.* 238.)

et il est clair qu'à cause de $x'=\frac{\cos L}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}$ (équat. 5), on aura

$$dx'=\left\{\frac{d.\cos L}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2}\,\frac{\cos L\,d.(1-e^2\sin^2 L)}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{3}{2}}}\right\};$$

mais quand x' augmente, L diminue; donc

$$dx' = -dL \sin L \left(\frac{-1}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} + \frac{e^2\cos^2 L}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$= \frac{(1-e^2)\sin L dL}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mettant dans l'expression de dS, au lieu de x' et de dx', leurs valeurs précédentes, et réduisant, on aura

$$dS = (1-e^2)(1-e^2\sin^2 L)^{-\frac{3}{2}}.dL;$$

puis développant par la formule du binome la puissance indiquée, il viendra

$$\frac{dS}{1-e^2} = \{1 + \tfrac{3}{2}e^2\sin^2 L + \tfrac{3}{2}.\tfrac{5}{4}e^4\sin^4 L + \tfrac{3}{2}.\tfrac{5}{4}.\tfrac{7}{6}e^6\sin^6 L + ..\}dL;$$

ensuite changeant les puissances des sinus en cosinus d'arcs multiples (Calc. diff. L. C., n° 199), on trouvera

$$\begin{aligned}\frac{dS}{1-e^2} = &\left\{1 + \frac{3}{2}.\frac{2}{1.2^2}e^2 + \frac{3.5}{2.4}.\frac{4.3}{1.2.2^4}e^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6}.\frac{6.5.4}{1.2.3.2^6}e^6 + ...\right\}dL \\ &- \left\{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}e^2 + \frac{3.5}{2.4}.\frac{4}{2^3}e^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6}.\frac{6.5}{1.2.2^5}e^6 ....\right\}dL\cos 2L \\ &+ \left\{\frac{3.5}{2.4}.\frac{1}{2^3}e^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6}.\frac{6}{1.2^5}e^6 ....\right\}dL\cos 4L \\ &- \left\{\frac{3.5.7}{2.4.6}.\frac{1}{2^5}e^6 + ...\right\}dL\cos 6L,\end{aligned}$$

ou bien pour abréger,

$$\frac{dS}{1-e^2} = mdL - ndL\cos 2L + pdL\cos 4L - qdL\cos 6L;$$

enfin intégrant, on aura

$$\frac{S}{1-e^2} = mL - \tfrac{1}{2}n\sin 2L + \tfrac{1}{4}p\sin 4L - \tfrac{1}{6}q\sin 6L + ...(13)$$

Ici l'intégrale est complète, parceque l'arc S s'évanouissant en même temps que L, la constante est nécessairement nulle.

Il est évident que pour un autre arc S' terminé à la latitude L', on a de même

$$\frac{S'}{1-e^2}=mL'-\tfrac{1}{2}n\sin 2L'+\tfrac{1}{4}p\sin 4L'-\tfrac{1}{6}q\sin 6L'+\ldots\ldots$$

parconséquent l'arc $S-S'$ compris entre les deux latitudes L et L' sera donné par l'équation

$$\frac{S-S'}{1-e^2}=m(L-L')-\tfrac{1}{2}n(\sin 2L-\sin 2L')+\tfrac{1}{4}p(\sin 4L-\sin 4L')-\tfrac{1}{6}q(\sin 6L-\sin 6L')+\ldots\ldots$$
$$=m(L-L')-n\sin(L-L')\cos(L+L')+\tfrac{1}{2}p\sin 2(L-L')\cos 2(L+L')-\tfrac{1}{4}q\sin 3(L-L')\cos 3(L+L').\ (14)$$

Si Q désigne le quart du méridien, on a $L=100^{gr}$, et l'équation (13) donne sur-le-champ

$$\frac{Q}{1-e^2}=m\,100^{gr};$$

alors en divisant celle-ci membre à membre par la précédente, on trouve

$$\frac{Q}{S-S'}=\frac{100^{gr}}{(L-L')-\frac{n}{m}\sin(L-L')\cos(L+L')+\frac{1}{2}\frac{p}{m}\sin 2(L-L')\cos 2(L+L')-\frac{1}{4}\frac{q}{m}\sin 3(L-L')\cos 3(L+L')};$$

mais en se bornant aux termes e^4,

$$m=1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4$$
$$\frac{n}{2}=\frac{3}{8}e^2+\frac{15}{32}e^4$$
$$\frac{1}{4}p=\frac{15}{256}e^4$$
$$\frac{n}{m}=\frac{3}{4}e^2+\frac{3}{8}e^4$$
$$\frac{1}{2}\frac{p}{m}=\frac{15}{128}e^4;$$

donc

$$Q=\frac{(S-S')100^{gr}}{(L-L')}\left(1+\left(\tfrac{3}{4}e^2+\tfrac{3}{8}e^4\right)\frac{\sin(L-L')\cos(L+L')}{L-L'}-\tfrac{15}{128}e^4\frac{\sin 2(L-L')\cos 2(L+L')}{L-L'}\right);\ (15)$$

Pour employer cette formule qui donne Q en mêmes mesures que l'arc $S-S'$, et dans laquelle les deux termes de la fraction $\frac{100^{gr}}{L-L'}$ doivent être de même espèce, il faudra réduire $L-L'$ en

parties du rayon, et parconséquent substituer $\frac{1}{2}\pi$, ou 1,5707963267950, à 100^{gr}, π désignant comme à l'ordinaire le rapport de la circonférence au diamètre.

Lorsque $L+L'=100^{gr}$, on a $\cos(L+L')=0$, et sans erreur sensible,

$$Q=\frac{(S-S')\,100^{gr}}{L-L'};$$

c'est-à-dire, alors, que la valeur du quart du méridien est indépendante de l'aplatissement, et que le grade dont le milieu répond au 50ième est assez exactement la centième partie du quart du méridien elliptique.

Dans la même circonstance, l'équation (14) donne

$$S-S'=(1-e^2)m(L-L'):$$

ainsi

$$Q=m(1-e^2)\tfrac{1}{2}\pi.$$

Eliminant m, on a enfin, le rayon de l'équateur étant toujours représenté par l'unité,

$$Q=\tfrac{1}{2}\pi(1-\tfrac{1}{4}e^2-\tfrac{3}{64}e^4-\tfrac{5}{256}e^6)\ldots\ldots\ldots\ (16)$$

c'est ce que donne d'ailleurs immédiatement la formule (13), en y faisant comme ci-dessus $L=100^{gr}$.

75. Afin de pouvoir faire usage de toutes les formules précédentes, il est nécessaire de déterminer d'avance l'élément qu'elles renferment; cet élément est l'excentricité e ou l'applatissement α. De plus, ces formules étant relatives à l'ellipse dont le grand axe $=1$, il est évident qu'il faudra les multiplier par le rayon de l'équateur donné en mesures connues, comme en mètres, etc..... lorsqu'on voudra les rapporter au méridien terrestre. Occupons-nous d'abord de la recherche de l'aplatissement.

Soient g, g' les longueurs mesurées de deux grades, L, L' les angles que font avec le grand axe les normales passant par les milieux de g, g', π la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon $=1$, et enfin R, R' les rayons de courbure des arcs g, g'; on aura par la formule (12'), et en remettant en évidence le rayon de l'équateur

$$R = a\left(1 - \alpha(2 - 3\sin^2 L)\right)$$
$$R' = a\left(1 - \alpha(2 - 3\sin^2 L')\right).$$

La demi-circonférence dont R est le rayon est égale à πR, et elle intercepte 200^{gr}; parconséquent

$$g = \frac{\pi R}{200}, \quad g' = \frac{\pi R'}{200}.$$

Substituant pour R et R' leurs valeurs précédentes, et divisant membre à membre, on aura

$$\frac{g'}{g} = \frac{1 - \alpha(2 - 3\sin^2 L')}{1 - \alpha(2 - 3\sin^2 L)},$$

effectuant réellement la division et négligeant les termes en α^2, on obtiendra

$$\frac{g'}{g} = 1 - 3\alpha(\sin^2 L - \sin^2 L');$$

d'où l'on tire

$$\alpha = \frac{g - g'}{3g(\sin^2 L - \sin^2 L')} \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Si, comme l'ont fait les savans qui furent chargés de la détermination du mètre, on prend le grade mesuré à l'équateur par Bouguer, et celui de France mesuré par Delambre et Méchain, on aura

$$g = 51077^t,70; \quad L = 0; \quad g' = 51316^t,58; \quad L' = 51^{gr},3327;$$

la toise en fer du Pérou étant prise à la température de $16^\circ\frac{1}{4}$ du thermomètre centigrade; ainsi la valeur précédente de α sera réduite à

$$\frac{g' - g}{3g\sin^2 L'};$$

partant

$$\alpha = \frac{238,88}{3.51077,7 \times 0,520923} = \frac{1}{334} \text{ (*)}.$$

(*) Quelques géomètres prennent le petit axe pour l'unité de mesure, et dans

L'équation $\alpha = \frac{g''-g}{3g\sin^2 L''}$ donne $g'' = g(1+3\alpha\sin^2 L'')$; or si l'on y fait $L''=50^{gr}$, on aura $\sin^2 L''=\frac{1}{2}$; donc à très-peu-près

$$g'' = 51307^t,40.$$

Telle est la valeur du grade moyen mesuré en France. Cet arc, multiplié par 100, donne pour la longueur du quart du méridien 5130740^t; et le mètre étant la dix-millionième partie de cette longueur, sa valeur $=0^t,5130740 = 3^{pieds}\ 11^{lig}\ \frac{296}{1000}$.

L'équation qui vient de nous fournir la valeur de g'' met en évidence ces propriétés remarquables, savoir, 1°. que les accroissemens des degrés des méridiens, depuis l'équateur jusqu'aux pôles, sont à très-peu-près proportionnels aux quarrés des sinus des latitudes; 2°. que ces degrés seraient égaux si l'aplatissement était nul, ou, ce qui est de même, si les méridiens étaient des cercles.

La connaissance de l'aplatissement mène nécessairement à celle du quarré de l'excentricité; car puisque le rayon de la terre au pôle est au rayon de l'équateur $:: 1-\frac{1}{334} : 1$, ou $:: \frac{333}{334} : 1$; il s'ensuit que $b'=\frac{333}{334}$; mais d'après ce qui précède, $1-b'^2=e^2$; donc

$$e^2 = 1-\left(\frac{333}{334}\right)^2 = \frac{667}{(334)^2} = 0,005979058,$$

quantité qui a pour logarithme 7,7766329.

Il est facile en outre de connaître la longueur du rayon de l'équateur et de celui du pôle; car des valeurs ci-dessus de R ou de R' on tirerait celle de a, et ensuite à cause de $\frac{b}{a}=\frac{333}{334}$, on aurait $b=\frac{333a}{334}$; mais si dans l'équation (14) on remet en évidence

---

cette hypothèse $a=b(1+\alpha')$: au surplus il est visible que si $\alpha=\frac{1}{\beta}$ est l'aplatissement comparé au grand axe, $\alpha'=\frac{1}{\beta-1}$ sera l'aplatissement rapporté au petit axe.

le rayon a, et que l'on y fasse $Q = 10000000$ mètres, on tirera; en se bornant dans le développement aux termes e^6,

$$a = \frac{10000000^{m\grave{e}t}}{\frac{1}{2}\pi}\left(1 + \frac{1}{4}e^2 + \frac{7}{64}e^4 + \frac{15}{256}e^6\right);$$

et puisque $e^2 = 2\alpha - \alpha^2$, il s'ensuit que le rayon de l'équateur exprimé en mètres, ou

$$a = \frac{10000000}{\frac{1}{2}\pi}\left(1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{16}\alpha^2 + \frac{1}{32}\alpha^3\right):$$

or $\alpha = \frac{1}{334}$; donc

$$\log a = 6{,}8045305\,, \quad a = 6375737^m\,,$$

ou bien en toises,

$$\log a = 6{,}5147105\,, \quad a = 3271226^t.$$

D'un autre côté, $b = a(1 - \alpha)$; ainsi on aura pour le demi-petit axe exprimé en mètres,

$$b = \frac{10000000}{\frac{1}{2}\pi}\left(1 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{5}{16}\alpha^2 - \frac{5}{32}\alpha^3\right);$$

et par suite

$$\log b = 6{,}8032283\,, \quad b = 6356649^m,$$

ou en toises,

$$\log b = 6{,}5134083\,, \quad b = 3261432^{tois}.$$

Nous rapportons ces valeurs, parcequ'elles sont employées très-souvent dans les calculs géodésiques.

76. Nous avons fait dépendre ci-dessus la valeur du grade moyen de la longueur du grade mesuré à l'équateur; mais l'on conçoit qu'il est plus naturel et surtout plus exact de la déduire de l'arc dont le milieu répond à très-peu-près à la latitude de 50^{gr}, et dont on a observé les latitudes des points extrêmes; ainsi l'équation (14) donne, en négligeant les puissances supérieures à e^2, et mettant 2α au lieu de e^2, art. 74,

$$S - S' = (L - L') - \tfrac{3}{2}\alpha \sin(L - L')\cos(L + L')$$

Dans

Dans cette formule, $L-L'=$ étant exprimé en grades, il faudra, pour l'homogénéité, multiplier par $\frac{200}{\pi}$ le terme en α : de plus, pour avoir $S-S'$ en mêmes mesures que le grade moyen g'', il sera nécessaire de multiplier le second membre par g''; on aura donc $S-S'$, ou simplement

$$A=g''(L-L')-\tfrac{3}{2}\alpha g''.\frac{200}{\pi}\sin(L-L')\cos(L+L'); \quad (a)$$

d'où l'on tirera sur-le-champ la valeur de g''.

Il a été mesuré en France quatre arcs consécutifs du méridien, dont les valeurs étant substituées dans l'équation (a), fourniront quatre équations entre les inconnues g'' et α. Si donc la terre était réellement un sphéroïde de révolution, que les erreurs des observations fussent insensibles, ainsi que les anomalies dans les latitudes, produites sans doute par des attractions locales qui changent la direction de la verticale; ces équations, combinées deux à deux, donneraient exactement les mêmes valeurs pour g'' et α; mais le défaut d'identité de ces valeurs donne lieu à penser que c'est à de telles anomalies que l'on doit attribuer les inégalités qui existent dans la longueur des grades mesurés à la même latitude, et quelquefois aussi dans les azimuths.

Voici les principaux résultats de l'opération exécutée par Delambre et Méchain.

Lieu de l'observation.	Sa latitude.	Arcs, compris A, exprimés en modules.	$L-L'$	$L+L'$
Dunkerque.....	56gr,706944			
Panthéon, à Paris.	54 ,274614	DP 62472,59.....	2gr,432330	110gr,981558
Evaux.........	51 ,309414	PE 76145,74.....	2 ,965200	105 ,584028
Carcassone.....	48 ,016790	EC 84424,55.....	3 ,292624	99 ,326204
Montjouy.......	45 ,958281	CM 52749,48.....	2 ,058509	93 ,975071

Pour déterminer l'ellipse qui satisfait le mieux à ces mesures, nous imiterons le calcul que Legendre vient de publier à ce sujet

dans un ouvrage ayant pour titre : *Nouvelle méthode pour la détermination des orbites des comètes*. Ce célèbre géomètre observe que l'on diminuera autant que possible l'influence des erreurs commises dans les mesures des arcs entiers, ou dans une série quelconque d'observations, en rendant *minimum* la somme des quarrés de ces erreurs.

Si, par exemple, on a le système d'équations

$$E = a + bx + cy + fz + \ldots\ldots$$
$$E' = a' + b'x + c'y + f'z + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

dans lesquelles abc, $a'b'c'\ldots$ sont des coefficiens connus, et $xyz\ldots$ sont des inconnues qu'il faut déterminer par la condition que les valeurs de E, $E'\ldots$ se réduisent à une quantité ou nulle, ou très-petite, on aura pour la somme des quarrés des erreurs,

$$E^2 + E'^2 + E''^2 \ldots = \begin{cases} \ \ (a + bx + cy + fz + \ldots)^2 \\ +(a' + b'x + c'z + f'z + \ldots)^2 \\ +(a'' + b''x + c''z + f''z + \ldots)^2 \\ +\text{etc.}\ldots\ldots \end{cases}$$

or le *minimum* de cette expression, pris d'abord par rapport à x seule, sera, (Calcul diff. L. C., n° 133),

$$0 = \Sigma ab + x\Sigma b^2 + y\Sigma bc + z\Sigma bf + \text{etc.};$$

en représentant, pour abréger, par Σab la somme des produits semblables $ab + a'b' + \ldots$, par Σb^2 la somme des quarrés $b^2 + b'^2 + \ldots$ et ainsi de suite.

Le *minimum*, pris en faisant varier y, sera de même,

$$0 = \Sigma ac + x\Sigma bc + y\Sigma c^2 + z\Sigma fc + \text{etc.}$$

puis en faisant varier z, on aura

$$0 = \Sigma af + x\Sigma bf + y\Sigma cf + z\Sigma f^2 + \text{etc.}$$

Il suit de là que *pour former l'équation du* minimum *par rap-*

port à l'une des inconnues, il faut multiplier tous les termes de chaque équation proposée par le coefficient de l'inconnue dans cette équation, pris avec son signe, et égaler à zéro la somme de tous ces produits.

Par cette méthode, qui non-seulement est exacte et générale, mais encore d'une application facile, on obtient autant d'équations du *minimum* qu'il y a d'inconnues, et il ne s'agit ensuite que de résoudre ces équations par les voies ordinaires.

Cela posé, comme le 50e grade est d'environ 25650 modules, égaux chacun à deux toises (art. 75), on peut faire $\frac{1}{g'} = \frac{1+\beta}{25650}$, β étant une très-petite fraction; et pour lors l'équation (a) qui donne

$$L - L' = \frac{A}{g'} + \frac{3^{\circ}}{2}\alpha\,\frac{200}{\pi}\sin(L - L')\cos(L + L')$$

deviendra

$$L - L' = \frac{A}{25650} + \beta\,.\,\frac{A}{25650} + \alpha\,.\,\frac{300}{\pi}\sin(L - L')\cos(L + L').$$

Maintenant, appelant E, E'... les corrections additives aux latitudes de Dunkerque, du Panthéon, etc... on aura $L + E - L - E'$ au lieu de $L - L'$, etc. et alors

$$\begin{aligned}
E - E' &= 0{,}003252 + (2{,}435)\beta - (0{,}626)\alpha \\
E' - E'' &= 0{,}003443 + (2{,}969)\beta - (0{,}389)\alpha \\
E'' - E''' &= -0{,}001219 + (3{,}291)\beta + (0{,}052)\alpha \\
E''' - E^{\text{IV}} &= -0{,}001999 + (2{,}056)\beta + (0{,}292)\alpha.
\end{aligned}$$

Afin de pouvoir considérer ces erreurs séparément, on regardera comme une nouvelle inconnue l'erreur E'', par exemple, et l'on aura

$$\begin{aligned}
E &= E'' + 0{,}006695 + (5{,}404)\beta - (1{,}016)\alpha \\
E' &= E'' + 0{,}003443 + (2{,}969)\beta - (0{,}389)\alpha \\
E'' &= E'' \\
E''' &= E'' + 0{,}001219 - (3{,}291)\beta - (0{,}052)\alpha \\
E^{\text{IV}} &= E'' + 0{,}003218 - (5{,}348)\beta - (0{,}344)\alpha.
\end{aligned}$$

Appliquant le principe des *moindres quarrés*, énoncé précédemment, et exprimant d'abord la condition du *minimum*, par rapport à l'inconnue E'', dont tous les coefficiens sont 1, on aura par l'addition de toutes ces équations,

$$o = 5E'' + 0{,}014575 - (0{,}266)\beta - (1{,}801)\alpha;$$

donc

$$E'' = -0{,}002915 + (0{,}053)\beta + (0{,}360)\alpha.$$

La substitution de cette valeur dans les cinq équations ci-dessus conduit à

$$\left.\begin{aligned} E &= 0{,}003780 + (5{,}457)\beta - (0{,}655)\alpha \\ E' &= 0{,}000528 + (3{,}022)\beta - (0{,}029)\alpha \\ E'' &= -0{,}002915 + (0{,}053)\beta + (0{,}360)\alpha \\ E''' &= -0{,}001696 - (3{,}238)\beta + (0{,}308)\alpha \\ E^{\text{IV}} &= 0{,}000303 - (5{,}295)\beta + (0{,}016)\alpha \end{aligned}\right\} \quad (b).$$

On exprimera la condition du *minimum* par rapport à β, en multipliant chacune de ces équations par le coefficient de β dans ces mêmes équations, pris avec son signe, et en égalant à zéro la somme de tous ces produits. Si l'on opère de la même manière par rapport à α, l'on aura les deux relations

$$\begin{aligned} o &= 0{,}025957 + (77{,}438)\beta - (4{,}729)\alpha, \\ o &= -0{,}004060 - (4{,}729)\beta + (0{,}655)\alpha, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\alpha = 0{,}00675, \quad \beta = 0{,}0000773;$$

donc l'aplatissement

$$\alpha = \frac{1}{148},$$

et le 50e grade

$$g'' = \frac{25650}{1+\beta} = 25648{,}02.$$

Enfin substituant dans les équations (*b*) les valeurs de α et β, on aura pour les erreurs exprimées en secondes décimales,

$$E = -2{,}''23, \quad E' = 5'',63, \quad E'' = -4'',79, \quad E''' = 1'',34, \quad E^{\text{IV}} = 0,''05.$$

L'aplatissement déterminé par le concours de ces erreurs est beaucoup plus grand que celui qui résulte des phénomènes de la pesanteur, de la précession et de la nutation; car suivant ces phénomènes, cet aplatissement est seulement de $\frac{1}{330}$, et c'est pour cette raison que l'on a préféré de le déduire de la longueur des arcs mesurés en France et à l'équateur.

Si dans les équations (b) on fait $\alpha = \frac{1}{330}$, et que l'on cherche, comme on vient de l'enseigner, l'équation du *minimum*, on obtiendra une résultante qui fournira une nouvelle valeur de β, et pour lors le 50e grade, qui est une fonction de cette valeur, s'accordera suffisamment avec la détermination adoptée, (art. 75); mais il résultera de là que les valeurs de E, E', E'',... s'écarteront davantage des limites probables des erreurs des observations. (Consultez à cet égard le Mémoire cité de Legendre, et la Mécanique Céleste, tome II, page 140.)

77. Il peut être utile de connaître la nature de la courbe formée sur le sphéroïde par un plan perpendiculaire à celui du méridien : cette recherche exige d'abord que l'on ait l'équation de la surface du sphéroïde de révolution : en rapportant ensuite cette surface à des coordonnées prises dans le plan coupant, on parviendra à une équation entre deux indéterminées seulement, et l'on aura ainsi l'équation de la courbe cherchée (41).

Pour trouver l'équation du sphéroïde engendré par la révolution d'une ellipse autour de son petit axe, il faut considérer que la courbe génératrice étant plane, ses équations seront

$$\left.\begin{array}{r} a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \\ z = 0 \end{array}\right\}, \quad (A)$$

on aura en outre

$$\left.\begin{array}{r} y = \delta \\ x^2 + y^2 + z^2 = f(\delta) \end{array}\right\}, \quad (B)$$

$y = \delta$ étant l'équation d'un plan perpendiculaire à l'axe de rotation $2b$; et la dernière, celle d'une sphère dont le centre est à l'origine des coordonnées. (*Feuilles d'analyse de* Monge, n° 6).

Ces quatre équations doivent avoir lieu en même temps, pour que la surface proposée soit de révolution. Si donc on élimine

x, y, z, on aura

$$a^2b^2 - a^2\delta^2 + b^2\delta^2 = b^2 f(\delta);$$

et en substituant pour δ et $f(\delta)$ leurs valeurs (B), la surface du sphéroïde de révolution aura pour équation

$$b^2z^2 + a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \ (^*) \qquad (C)$$

Maintenant si AM est la trace du plan coupant sur celui du méridien, pris pour le plan des xy, et que ces deux plans soient perpendiculaires entr'eux, il faudra, dans les équations rélatives à la transformation des axes (art. 41), faire $\theta = 1$, et l'on aura pour tous les points du plan coupant

$$x = m + x' \cos \varphi$$
$$y = n + x' \sin \varphi$$
$$z = p + y'.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (C), on trouvera en faisant pour simplifier, $n = p = 0$,

$$b^2y'^2 + (a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)\,x'^2 + 2mb^2\cos\varphi . x' = (a^2 - m^2)\,b^2. \qquad (D)$$

(*) Si dans cette équation l'on introduisait l'aplatissement α du sphéroïde de révolution, elle deviendrait, à cause de $b = a(1-\alpha)$,

$$(1-\alpha)^2z^2 + (1-\alpha)^2x^2 + a^2y^2 = a^2(1-\alpha)^2;$$

ou en développant et négligeant les puissances de α, et faisant de plus $a = 1$, pour simplifier, on aura

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 - 2\alpha(-1 + x^2 + z^2) = 0.$$

Cela posé, si la terre n'est pas un sphéroïde de révolution, l'équation de sa surface pourra du moins être représentée par celle-ci :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 - 2\alpha u' = u = 0;$$

dans laquelle α sera un très-petit coefficient, et u' une fonction de x, y, z pour plus de généralité. C'est sous cette forme que l'auteur de la Mécanique Céleste considère l'équation de la surface de la terre.

équation à l'ellipse, et qui est celle de l'intersection cherchée.

Cette équation serait celle du cercle, si les coefficiens de x'^2 et y'^2 étaient égaux, c'est-à-dire, si

$$b^2 = a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi.$$

On satisfera à cette condition en faisant $\varphi = 0$; car, dans ce cas, $\sin \varphi = 0$ et $\cos \varphi = 1$. La courbe d'intersection est donc un cercle, lorsque le plan coupant est parallèle au grand axe $2a$ du sphéroïde de révolution.

Si l'on voulait que la trace AM du plan coupant coïncidât avec la normale correspondante à la latitude L, on ferait $\varphi = L$, et FIG. 27

$$m = CL = \frac{e^2 \cos L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}. \quad \text{(art. 74, équat. 6.)}$$

L'équation D, dans laquelle on fera d'ailleurs $a=1$, et $b^2 = 1 - e^2$, deviendra donc, au moyen de ces valeurs,

$$y'^2 + \frac{(1 - e^2 \cos^2 L)}{1 - e^2} x'^2 + \frac{2e^2 \cos^2 L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} x' = 1 - \frac{e^4 \cos^2 L}{1 - e^2 \sin^2 L}.$$

Pour avoir les points où la courbe d'intersection coupe l'axe des x, on fera $y = 0$, alors

$$x'^2 + \frac{2e^2 \cos^2 L (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cos^2 L)(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} x' - \left(1 - \frac{e^4 \cos^2 L}{1 - e^2 \sin^2 L}\right) \frac{(1 - e^2)}{(1 - e^2 \cos^2 L)} = 0.$$

Si l'on désigne par $x_, x_{,,}$ les deux racines de cette équation; on aura

$$x_, = \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}},$$

et
$$x_{,,} = -\left(\frac{1 + e^2 \cos^2 L}{1 - e^2 \cos^2 L}\right) \frac{(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}.$$

La première racine est l'expression même de la normale obtenue plus haut, et la seconde racine est la valeur de la normale opposée.

Lorsque $L = 1^q$; on a évidemment

$$x_, = \sqrt{(1 - e^2)} = b', \quad \text{et} \quad x_{,,} = -\sqrt{(1 - e^2)} = -b'.$$

Il ne faut pas confondre la courbe d'intersection actuelle avec la ligne géodésique qui, entre le pôle et l'équateur, serait perpendiculaire au méridien terrestre; car celle-ci est essentiellement à double courbure dans le sphéroïde (art. 71). Cependant ces deux courbes différeront d'autant moins l'une de l'autre, que l'aplatissement de la terre sera plus petit.

En mesurant, dans la plus grande largeur de la France, un arc de la perpendiculaire à la méridienne de l'Observatoire de Paris, avec la précision qui caractérise la dernière mesure de l'arc du méridien, compris entre Dunkerque et les îles Baléares, on aurait des données plus certaines sur la nature et les dimensions du sphéroïde osculateur à la surface de la terre, au point où la perpendiculaire coupe la méridienne. Cette opération, qui forme depuis long-temps l'objet des vœux des savans, a déjà été commencée par M. Henry, astronome du dépôt général de la guerre, et il faut espérer que l'on ne tardera pas à en connaître les résultats.

78. Nous pourrions déduire de la théorie précédente d'autres conséquences non moins remarquables; mais il nous sera plus utile par la suite de connaître la longueur d'un arc S exprimé en grades, et faisant partie d'un parallèle quelconque. Si donc on reprend la valeur de $CF = x'$ désignée sous le n° 5, la circonférence de ce parallèle à la latitude de L sera $2\pi x'$, et l'arc S exprimé en grades, égalera

$$\frac{2\pi x'}{400}, S;$$

remplaçant x' par sa valeur citée, et multipliant par le rayon a de l'équateur exprimé en mètres (75), on aura par la longueur de l'arc S, exprimée en mêmes mesures,

$$\frac{\frac{1}{2}\pi S a \cos L}{100(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}. \qquad (E)$$

La table III, qui sert à convertir les grades de longitude et de latitude en mètres, renferme le logarithme du facteur

$$\frac{\frac{1}{2}\pi a}{100} \times \frac{1}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} = F,$$

on

on y prend, par exemple, ce logarithme auquel on ajoute celui de $S \cos L$, et la somme exprime le logarithme de l'arc S en mètres. Cette table a été calculée au dépôt général de la guerre, et est insérée dans une instruction que le général Sanson, directeur de cet établissement, a publiée pour l'usage des ingénieurs géographes. Plusieurs nombres de cette table ont été comparés par Delambre lui-même avec la formule précédente qu'il a mise sous des formes nouvelles, et à l'aide de laquelle on aurait abrégé considérablement le travail, en ajoutant même à la précision; mais l'accord qui règne est plus que suffisant pour la pratique. Le général Sanson ayant bien voulu me communiquer les résultats analytiques de cet illustre astronome, j'ai vérifié concurremment avec M. Plessis, ingénieur-géographe, ceux que l'on n'avait pas encore eu occasion d'employer.

Voici ces nouvelles formules avec leurs démonstrations.

Il est d'abord évident que le logarithme de F, ou

$$\log\left(\frac{\frac{1}{2}\pi \cdot a}{100}\times\frac{1}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}\right)=\log\tfrac{1}{2}\pi-2+\log a-\tfrac{1}{2}\log(1-e^2\sin^2 L);$$

mais par l'art. 74, équat. 16,

$$a=\frac{10000000^{m/t}}{\frac{1}{2}\pi}\times\left(1-\tfrac{1}{4}e^2-\tfrac{3}{64}e^4-\tfrac{5}{256}e^6\right)^{-1};$$

d'où

$$\log a = 7-\log\tfrac{1}{2}\pi-\log\left(1-\tfrac{1}{4}e^2-\tfrac{3}{64}e^4-\tfrac{5}{256}e^6\right);$$

parconséquent si on développe en série les logarithmes indiqués; on aura (art. 34)

$$\log F=5+M\left\{\left(\tfrac{1}{4}e^2+\tfrac{3}{64}e^4+\tfrac{5}{256}e^6\right)+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4}e^2+\tfrac{3}{64}e^4+\ldots\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{4}e^2+\tfrac{3}{64}e^4+\ldots\right)^3\right\}$$
$$+\tfrac{1}{2}M\left\{e^2\sin^2 L+\tfrac{1}{2}e^4\sin^4 L+\tfrac{1}{3}e^6\sin^6 L+\ldots\right\}$$

M qui est le module des tables, étant égal à 0,434294481 9.

Si, en outre, on développe les puissances et qu'on réduise, on trouvera

$$\log F=5+M\left(\tfrac{1}{4}e^2+\tfrac{5}{64}e^4+\tfrac{7}{192}e^6\right)+M\left(\tfrac{1}{2}e^2\sin^2 L+\tfrac{1}{4}e^4\sin^4 L+\tfrac{1}{6}e^6\sin^6 L\right);$$

puis si l'on change les puissances de sinus en cosinus d'arcs mul-

tiples, on aura

$$5+M\{(\tfrac{1}{2}e^2+\tfrac{11}{64}e^4+\tfrac{11}{192}e^6)-(\tfrac{1}{4}e^2+\tfrac{1}{8}e^4+\tfrac{5}{64}e^6)\cos 2L+(\tfrac{1}{32}e^4+\tfrac{1}{32}e^6)\cos 4L-\tfrac{1}{192}e^6\cos 6L\};$$

or par ce qui précède

$$e^2=\frac{667}{(334)^2};$$

donc $\log F$, ou

$$\log\frac{\frac{1}{2}\pi a}{100}\times\frac{1}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}=5{,}001\ 301\ 013-0{,}000\ 651\ 1160.\cos 2L$$
$$+\ 0{,}000\ 000\ 4881.\cos 4L-0{,}000\ 000\ 000\ 48\cos 6L.$$

On obtiendrait aisément une vérification de cette formule pour le cas de $L=0$; car, dans ce cas,

$$\log\pi+\log a-\log 200=5{,}000650385,$$

et l'on sait que

$$\begin{aligned}\log\ \pi &= 0{,}497\ 149\ 873\\ \log\ a &= 6{,}804\ 530\ 508\\ c.\log 200 &= \underline{7{,}698\ 970\ 004}\\ &\ 5{,}000\ 650\ 385\end{aligned}$$

les deux membres de l'équation précédente sont donc identiques.

Si on prend les différences finies de l'équation ci-dessus, on aura en faisant $\Delta L=0'',10$, L et L' deux latitudes consécutives de la table, et en se rappelant qu'en général

$$\Delta.(\cos\mu z)=-\sin\mu z\sin\mu\Delta z-(1-\cos\mu\Delta z)\cos\mu z$$

ou simplement dans cette circonstance

$$\Delta.(\cos\mu z)=-\sin\mu z\sin\mu\Delta z;$$

on aura, dis-je,

$$\Delta\log F=+\ 0{,}000\ 651\ 1160\sin 2L\times\sin 2\Delta L-0{,}000\ 000\ 4881\sin 4L\times\sin 4\Delta L.$$

mais $2L=L+L'-\Delta L$, ou assez exactement $2\dot{L}=L+L'$; parconséquent

$$\Delta \log F = +0{,}000\,651\,1160 \times 0{,}003\,1416 \times \sin(L+L') - 0{,}000\,000\,4881 \times 0{,}006\,283\,a \sin 2(L+L')$$
$$= 0{,}000\,002\,0455 \sin(L+L') - 0{,}000\,000\,003\,07 \sin 2(L+L').$$

Développons par un procédé analogue la formule (E), et pour avoir l'expression du grade de longitude en mètres, faisons $S = 1^{gr}$; nous aurons

$$1^{gr} \text{ longitude} = \frac{\frac{1}{2}\pi a \cos L}{100(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}};$$

mettant à la place de a sa valeur trouvée plus haut, il viendra

$$1^{gr} \text{ longitude} = \frac{10000000^{m}}{100(1 - \frac{1}{4}e^2 - \ldots)} \cdot \frac{\cos L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= 100000^{m}(1 + \tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{7}{64}e^4 + \tfrac{15}{256}e^6)\cos L(1 + \tfrac{1}{2}e^2\sin^2 L + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}e^4\sin^4 L + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}e^6\sin^6 L)$$
$$= 100000^{m}\{(1 + \tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{7}{64}e^4 + \tfrac{15}{256}e^6)\cos L + (\tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{1}{8}e^4 + \tfrac{7}{128}e^6)\sin^2 L \cos L$$
$$+ (\tfrac{3}{8}e^4 + \tfrac{3}{32}e^6)\sin^4 L \cos L + \tfrac{5}{16}\sin^6 L \cos L$$

Ensuite n'employant que des cosinus d'arcs multiples, on aura

$$1^{gr}\text{longitude} = 100000(1 + \tfrac{3}{8}e^2 + \tfrac{3}{16}e^4 + \tfrac{111}{1024}e^6)\cos L - 100000(\tfrac{1}{8}e^2 + \tfrac{13}{128}e^4 + \tfrac{77}{1024}e^6)\cos 3L$$
$$+ 100000(\tfrac{3}{128}e^4 + \tfrac{31}{1024}e^6)\cos 5L - 100000(\tfrac{5}{1024}e^6)\cos 7L$$
$$= 100224^{m},887358 \cos L - 75^{m},102933 \cos 3L + 0^{m},084434 \cos 5L - 0^{m},000104 \cos 7L.$$

Cette formule se vérifie comme la précédente en faisant $L = 0$; car alors le second membre devient $= 100149^{m}868755$, et c'est précisément ce que donne le premier nombre, qui se réduit à $100000^{m}(1 + \frac{1}{4}e^2 + \frac{7}{64}e^4 + \frac{15}{256}e^6)$, et qui exprime la valeur du rayon de l'équateur.

En prenant les différences finies, et en faisant $\Delta L = 0^{gr},10$; on aura

$$\Delta.\text{grade}.\text{longitude} = 157^{m},4330 \sin\tfrac{1}{2}(L+L') - 0^{m},3539 \sin\tfrac{3}{2}(L+L') + 0^{m},00066 \sin\tfrac{5}{2}(L+L').$$

La formule $g = \frac{\pi . a}{200} \times \frac{1 - e^2}{(1 - e^2\sin^2 L)^{\frac{3}{2}}}$ trouvée à l'art. 75 pour les grades de latitude, peut être développée de même en séries ordonnées suivant les puissances de $\sin L$ ou les cosinus des multiples de L.

T 2

CHAPITRE XII.

Calculs des latitudes, longitudes et azimuths des objets terrestres.

Exposition de la méthode de Legendre.

79. On est redevable à Dionis-du-Séjour, d'une méthode très-ingénieuse et fort exacte pour trouver la latitude et la longitude d'un lieu de la terre, connu par ses distances à la méridienne et à la perpendiculaire d'un autre lieu connu. Cette méthode, cependant, conduit à des formules qui ne sont ni aussi simples ni aussi directes que le comporte la nature du problême. Mais Legendre et Delambre ont donné, à l'occasion de la nouvelle mesure d'un arc du méridien, d'autres formules exemptes de toute objection, et qui paraissent pour cette raison devoir mériter la préférence; aussi la plupart des ingénieurs chargés d'opérations géodésiques du premier ordre, en font-ils particulièremeut usage. Tel est le motif qui m'a engagé à donner à l'art. 36 les démonstrations de quelques-unes de celles que Legendre n'a fait, pour ainsi dire, qu'énoncer dans son Mémoire imprimé en l'an 7.

Si la carte avait très-peu d'étendue, les distances des objets à la perpendiculaire, pourraient être considérées comme des arcs de grands cercles, et, dans cette hypothèse, être converties en parties du quadrans par les formules relatives à la sphère; alors elles exprimeraient assez exactement les latitudes de ces objets, et les distances à la méridienne, converties de même, exprimeraient leurs longitudes par rapport à ces deux axes rectangulaires. Ensuite il serait facile de connaître les latitudes et les longitudes absolues de ces mêmes objets, c'est-à-dire leur position sur le globe. Mais

la méthode dont nous parlons n'est plus admissible, lorsque les points rapportés à la méridienne et à sa perpendiculaire en sont fort éloignés : il est donc essentiel, dans ce cas, d'avoir égard à l'ellipticité de la terre, et c'est à quoi l'on parviendra à l'aide des formules suivantes.

Soit P le pôle de la terre, PA et PB deux méridiens elliptiques. Soit en outre L la latitude connue du point A : on demande celle du point B situé sur l'arc BA, perpendiculaire à PA ; sa longitude, et l'angle PBA ou l'azimuth de A observé de B. FIG. 28

Imaginons aux points A et B les verticales AM, BN, et faisons $AB=y$, $AM=r$, $NB=r'$.

Le petit arc y pouvant avoir r pour rayon de courbure, il s'ensuit qu'un arc semblable φ dont le rayon $=1$, aurait pour valeur $\frac{y}{r}$.

Cela posé, si du point M comme centre et avec un rayon $Mb=1$, on décrit les arcs ab, ap, pb, on aura le triangle sphérique rectangle pab, dans lequel on connaîtra le côté $pa=1^q-L$, le côté $ab=\varphi$, et l'angle compris $pab=1^q$ par hypothèse ; or, d'après les principes de trigonométrie démontrés (art. 20, etc.)

$$\cos(pb)=\sin L.\cos\varphi$$
$$\text{tang}\, P=\frac{\text{tang}\,\varphi}{\cos L}$$
$$\text{tang}\, b=\frac{\cot L}{\sin\varphi};$$

Ces formules sont les mêmes que celles que nous avons désignées par (B), art. 36; en les comparant entr'elles, il est aisé de voir que

$$a=(pb),\quad b=\varphi,\quad c=1^q-L,\quad B=P,\quad C=b.$$

Il suit de là et des développemens effectués dans l'article cité, que

$$(pb)=1^q-L+\tfrac{1}{2}\varphi^2\,\text{tang}\, L,$$
$$P=\frac{\varphi}{\cos L}-\tfrac{1}{3}\varphi^3\frac{\sin^2 L}{\cos^3 L},$$
$$b=1^q-\varphi\,\text{tang}\, L+\tfrac{1}{3}\varphi^3\,\text{tang}\, L\,(\tfrac{1}{2}+\text{tang}^2 L).$$

De la valeur de (pb) on déduit, pour la latitude approchée de B,

$$1^q - (pb) = L - \tfrac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tang} L.$$

La valeur de P est la différence en longitude entre les deux points A et B ; enfin la valeur de b est celle de l'azimuth cherché PBA.

Pour avoir plus exactement la latitude du point B, on remarquera qu'elle est égale au complément de l'angle PNB ou de l'angle $PMB + NBM = pb + NBM$; mais à cause que l'angle NAM est, à très-peu de chose près, égal à l'angle NBM, on aura

$$NBM = \frac{MN \cos L}{r} = \psi.$$

Nous obtiendrons facilement MN au moyen de la formule (8) de l'art. 74 ; car si l'on y fait $n' = r$, on aura, abstraction faite du signe, $CM = e^2 r \sin L$. De même, pour le point B dont la latitude est L', on aura $CN = e^2 r' \sin. L'$; ainsi, à très-peu près,

$$MN = e^2 r (\sin L - \sin L').$$

Il est aisé de se convaincre que cette valeur est toujours positive, c'est-à-dire que $CM > CN$; car la latitude de A étant évidemment plus grande que celle de B, on a $\sin L > \sin L'$. Pour décomposer en facteurs la quantité $\sin L - \sin L'$, il faut se rappeler que par les formules trigonométriques on a

$$\sin L - \sin L' = 2 \sin\left(\frac{L - L'}{2}\right) \cos\left(\frac{L + L'}{2}\right);$$

donc

$$MN = 2e^2 r \sin \frac{L - L'}{2} \cos \frac{L + L'}{2}.$$

Dans la supposition que $L - L'$ est très-petit, on peut prendre l'arc pour le sinus, et mettre $\cos L$ au lieu de $\cos \frac{L + L'}{2}$; il vient alors

$$MN = e^2 r (L - L') \cos L.$$

Maintenant si l'on fait attention que la latitude approchée de B est $L' = L - \frac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tang} L$, on aura

$$MN = \frac{1}{2} e^2 r \varphi^2 \operatorname{tang} L \cos L = \frac{1}{2} e^2 r \varphi^2 \sin L.$$

Il suit de là que l'angle $NBM = \frac{1}{2} e^2 \varphi^2 \sin L . \cos L$ (*), et parconséquent que la latitude vraie de $B = 1' - (pb) - \psi$ sera

$$L' = L - \frac{1}{2} \varphi^2 \operatorname{tang} L - \frac{1}{2} e^2 \varphi^2 \sin L \cos L.$$

A la rigueur, l'azimuth calculé ci-dessus n'est lui-même qu'approché; car le véritable azimuth de AB, par rapport au méridien PB, est l'angle formé par les plans PNB, ABN, puisque leur commune section ou la verticale du point B est la droite BN: mais nous allons démontrer, d'après Delambre, que la correction d'azimuth est insensible.

Si l'on considère le point B comme le centre d'une sphère, sa surface sera coupée par les trois plans ABM, NBM, ABN,

---

(*) Il est à propos de donner une expression plus exacte de MN et de ψ, parce-que nous aurons occasion d'en faire bientôt usage ; pour cet effet, l'on remarquera que puisque $r = \frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}$, on peut sans erreur sensible faire $r = 1$: pour lors si l'on désigne $L - L'$ par dL, on aura $L + L' = 2L - dL$, et l'équation $MN = 2e^2 r \sin \frac{L - L'}{2} \cos \frac{L + L'}{2}$ deviendra

$$MN = 2e^2 \sin \tfrac{1}{2} dL \cos (L - \tfrac{1}{2} dL).$$

Développant le facteur cos. Dans l'hypothèse que dL est très-petit, on aura

$$MN = 2e^2 \sin \tfrac{1}{2} dL \cos L + 2e^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} dL \sin L.$$

Or lorsqu'un arc A est très-petit, on a, à très-peu près, $2 \sin \frac{1}{2} A = \sin A$; donc

$$MN = e^2 \sin dL \cos L + \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 dL \sin L.$$

D'un autre côté, puisque $\sin NBM = \sin \psi = \frac{MN \sin BNM}{MB} = \frac{MN \cos L'}{r}$, on aura en vertu des valeurs précédentes de MN et de r.

$$\sin \psi = e^2 \sin dL \cos L \cos L' + \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 dL \sin L \cos L'.$$

Mais $\cos L' = \cos L + \sin L \sin dL$; donc enfin

$$\psi = e^2 \, dL \cos^2 L + \tfrac{1}{2} e^2 dL \sin dL \sin L \cos L.$$

suivant le triangle sphérique $a'Mn$: or dans ce triangle nous connaissons l'angle $a'Mn$, c'est l'azimuth calculé. Nous connaissons en outre l'arc nM ou l'angle $NBM = \psi$, qui est la correction de la latitude; et à cause de l'angle $AMB = \varphi$, on a, en considérant le triangle ABM comme isocèle, arc $a'M = 1^q \frac{\varphi}{2}$; donc si ξ désigne la correction d'azimuth, et z' l'azimuth vrai compté du nord, auquel cas $z' - \xi = a'Mn$ sera l'azimuth approché, compté de même; la formule $\cot A = \frac{\cot a \sin b - \cos C \cos b}{\sin C}$, démontrée à l'art. 28, donnera, en y faisant

$$C = z' - \xi, \quad b = \psi, \quad a = 1^q - \frac{\varphi}{2}, \quad z' = 2^q - A,$$

$$-\operatorname{tang} z' = \frac{\sin(z' - \xi)}{\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\sin\psi - \cos(z' - \xi)\cos\psi};$$

d'où

$$\operatorname{tang}(z' - \xi) = \operatorname{tang} z' \cos\psi - \frac{\operatorname{tang} z' \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\sin\psi}{\cos(z' - \xi)};$$

ajoutant de part et d'autre tang z', et changeant tous les signes, il viendra

$$\operatorname{tang} z' - \operatorname{tang}(z' - \xi) = \operatorname{tang} z'(1 - \cos\psi) + \frac{\operatorname{tang} z' \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\sin\psi}{\cos(z' - \xi)}.$$

Si l'on chasse le dénominateur, le premier membre pourra se mettre sous la forme

$$\cos\xi(\operatorname{tang} z' \cos z' - \sin z') + \sin\xi(\operatorname{tang} z' \sin z' + \cos z'),$$

et se réduire à $\frac{\sin\xi}{\cos z'}$; à cause de $\operatorname{tang} z' = \frac{\sin z'}{\cos z'}$, et de $\sin^2 z' + \cos^2 z' = 1$. L'équation précédente devient donc, en faisant attention que $1 - \cos\psi = 2\sin^2\frac{1}{2}\psi$, et que ξ est très-petit,

$$\xi = \sin z' \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi \sin\psi + 2\sin z' \sin^2\tfrac{1}{2}\psi \cos(z' - \xi).$$

Nous voyons par cette formule que ξ est inférieur à ψ, qui est lui-même déjà fort petit : on peut donc toujours négliger la correction d'azimuth, que l'on pourrait d'ailleurs calculer, puisque

puisque

$$\text{azimuth vrai} = \text{azimuth approché} + \frac{\xi}{2};$$

mais dans l'application de la formule précédente il faudrait substituer z pour z'.

80. Il résulte de ce qui précède que si L est la latitude du point A, L' la latitude du point B, y la distance AB perpendiculaire sur le méridien de A, et r le rayon de la terre ou la normale au point A, on aura, en désignant par R le nombre de secondes décimales contenues dans ce rayon,

$$L' = L - \tfrac{1}{2} R \frac{y^2}{r^2} \operatorname{tang} L - \tfrac{1}{2} R e^2 \frac{y^2}{r^2} \sin L \cos L \ldots\ldots\ldots (a)$$

et réciproquement

$$L = L' + \tfrac{1}{2} R \frac{y^2}{r^2} \operatorname{tang} L' + \tfrac{1}{2} R e^2 \frac{y^2}{r^2} \sin L' \cos L' \ldots\ldots\ldots (b)$$

Comme e désigne l'excentricité de la terre, il est visible que le dernier terme de ces formules sera presque toujours négligeable.

Les mêmes choses étant posées, on aura la différence de longitude des points A et B par cette formule

$$P = \frac{Ry}{r \cos L} \left(1 - \tfrac{1}{3} \frac{y^2}{r^2} \operatorname{tang}^2 L\right), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

et l'azimuth de l'arc BA ou l'angle PBA sera

$$z' = 1' - \frac{Ry}{r} \operatorname{tang} L + \tfrac{1}{3} R \frac{y^3}{r^3} \operatorname{tang} L \left(\tfrac{1}{2} + \operatorname{tang}^2 L\right) \ldots\ldots (d)$$

Si l'on connaît seulement L', il faudra faire usage de la formule 5 (art. 38), et l'on aura

$$z' = 1' - R \frac{y}{r} \operatorname{tang} L' - \tfrac{1}{3} R \frac{y^3}{r^3} \operatorname{tang} L' \left(1 + \tfrac{1}{2} \operatorname{tang}^2 L'\right) \ldots\ldots (e)$$

Toutes les formules précédentes n'exigent que la recherche d'un très-petit nombre de logarithmes, et ont toutes des élémens communs qui en rendent le calcul très-rapide, comme on verra par les exemples que nous donnerons bientôt.

Il arrive souvent que l'on n'a point immédiatement la lati-

tude L du point A; mais alors on connaît nécessairement la distance x de ce point à la perpendiculaire du lieu principal de la carte : ainsi il convient de réduire x en parties de grade; et selon que x sera austral ou boréal par rapport à la perpendiculaire, on soustraira sa valeur de la latitude du lieu principal, ou bien on l'ajoutera à cette même latitude pour avoir celle du point A. La réduction dont il s'agit peut se déduire assez exactement de la valeur de φ exprimée en fonction de la latitude L du point A; car, à cause de $\varphi = \frac{y}{r}$ et de $r = \frac{1}{(1-e^2\sin^2L)^{\frac{1}{2}}}$ (formule 7, art. 74), on a

$$\varphi = y(1 - e^2\sin^2L)^{\frac{1}{2}} = y(1 - \tfrac{1}{2}e^2\sin^2L\ldots\ldots).$$

Dans cette équation, y est censé faire partie du rayon de l'équateur $=1$; mais dans la pratique, ce rayon $=\rho$; ainsi il faudra substituer $\frac{y}{\rho}$ à la place de y, qui sera réduit en secondes par cette formule

$$\varphi = \frac{R''y}{\rho}(1 - \tfrac{1}{2}e^2\sin^2L);$$

et en y écrivant x au lieu de y, on aurait de même l'arc x réduit en parties de grades.

Pour la latitude $L = \frac{1}{4}\pi$, ou $= \frac{1^q}{2}$, on a $\sin^2L = \frac{1}{2}$, et alors

$$\varphi = \frac{R''y}{\rho}(1 - \tfrac{1}{4}e^2).$$

Enfin, dans l'hypothèse que la terre est sphérique, on a $e=0$; partant

$$\varphi = \frac{R''y}{\rho}.$$

Pour avoir la valeur de φ par la table III, on prend avec l'argument L le logarithme du facteur de y, que l'on ajoute au logarithme de y, comme nous l'avons déjà pratiqué à l'art. 55.

Application des formules précédentes.

81. Soit $L=44^{gr},10'$ la latitude du point A, et $y=25960^{m}$. la perpendiculaire AB à la méridienne AP; on demande la latitude de B, la différence de longitude de A et de B, et l'azimuth de A observé du point B, ou l'angle ABP.

On calculera par la formule $r=\frac{\rho}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{3}{2}}}$ le rayon r de courbure de l'arc AB; ainsi

$$\log e^2 = l.0{,}00597906 = 7{,}7766329$$
$$\log \sin^2 L = l.\sin^2 44^{gr},10' = \underline{9{,}6105034} \qquad 1{,}0000000$$
$$-\ 7{,}3871363 = \underline{0{,}0024386}$$
$$1-e^2\sin^2 L = 0{,}9975614$$
$$\log \rho \ldots\ldots\ldots\ldots = 6{,}8045305$$
$$c.l.(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{3}{2}} = \underline{0{,}0005302}$$
$$l.r = 6{,}8050607$$

Le logarithme de r se trouve plus simplement et plus exactement par la méthode de l'art. 78; en effet on a d'abord

$$\log r = \log a - \tfrac{1}{2}\log(1-e^2\sin^2 L),$$

et après les développemens et les transformations convenables,

$$\log r = \log a + M\{\tfrac{1}{4}e^2+\tfrac{3}{32}e^4+\tfrac{5}{96}e^6-(\tfrac{1}{4}e^2+\tfrac{1}{8}e^4+\tfrac{5}{64}e^6)\cos 2L+(\tfrac{1}{32}e^4+\tfrac{1}{32}e^6)\cos 4L$$
$$-\tfrac{1}{192}e^6\cos 6L\};$$

partant

$$\log r = 6{,}80518\ 11363 - 0{,}00065\ 11160\cos 2L + 0{,}00000\ 04881\cos 4L$$
$$-\ 0{,}00000\ 00048\cos 6L.$$

Cette équation se vérifie comme dans l'article cité, en faisant $L=0$; car dans ce cas $\log.r=\log.a=6{,}80453050 8$; et si l'on fait $L=44^{gr},10'$, on aura comme ci-dessus, en prenant deux termes seulement,

$\log r = 6{,}8051811363 - 0{,}000651116 \times 0{,}184295 = 6{,}8050611.$

Nous voilà parvenus au logarithme de r, cherchons à présent la latitude de B par la formule (a).

$$\begin{aligned}
\log y &= 4{,}4143047 \\
c.l.r &= 3{,}1949392 \\
& \overline{7{,}6092439} \\
l.\left(\frac{y^2}{r^2}\right) &= 5{,}2184878 \\
l.R'' &= 5{,}80388 \\
l.0{,}5 &= 9{,}69897 \\
& \overline{0{,}72133} = M.
\end{aligned}$$

1er terme de la correction.

$$\begin{aligned}
M\ldots\ldots &= 0{,}72133 \\
l.\text{tang}L &= 9{,}91904 \\
&- \overline{0{,}64037} = 4'',369
\end{aligned}$$

2^e terme.

$$\begin{aligned}
M &= 0{,}72133 \\
l.e^2 &= 7{,}77663 \\
l.\sin L &= 9{,}80525 \\
l.\cos L &= 9{,}88621 \\
&- \overline{8{,}18942} = 0'',015.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{latitude } L &= \quad 44^{gr},100000 \\
\left.\begin{matrix}1^{er} \text{ terme } 4'',369 \\ 2^{e}\ldots\ldots\ 0{,}015\end{matrix}\right\} &= - \quad 0\ ,000438 \\
\text{latitude } L' &= \quad \overline{44^{gr},099562.}
\end{aligned}$$

On voit que l'on aurait pu négliger, sans inconvénient, le deuxième terme de la correction.

Pour calculer la différence en longitude, on fera usage de l'équation (c), et l'on aura

$$\begin{aligned}
\log \tfrac{1}{3} &= 9{,}5228787 \\
l.\frac{y^2}{r^2} &= 5{,}2184878 \\
l.\text{tang}^2 L &= 9{,}8380738 \qquad 1,\ldots\ldots\ldots \\
&- \overline{4{,}5794403} = \underline{0{,}000003797} \\
& \qquad\qquad\qquad 0{,}999996203 = N
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log N &= 9{,}9999984\\
l.R' &= 5{,}8038801\\
l.\tfrac{y}{r} &= 7{,}6092439\\
c.l.\cos L &= 0{,}1137852\\
l.P\ldots\ldots &= \overline{3{,}5269076} = 3364'{,}4.
\end{aligned}$$

Donc la différence de longitude cherchée $= 0^{r}{,}33644$.

Il ne nous reste plus qu'à trouver l'azimuth de *A* ou l'angle *PBA*; c'est ce que donnera la formule (*d*), dont voici le calcul.

1er terme de la correction.

$$\begin{aligned}
&\log R' = 5{,}8038801\\
&\log \tfrac{y}{r} = 7{,}6092439 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0{,}5\ldots\\
&l.\tang L = 9{,}9190369\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; l.\tang^2 L = 9{,}8380738 = 0{,}68877\\
&\quad -\overline{3{,}3321609} = 2148''{,}63 \qquad\qquad\qquad\qquad \overline{1{,}18877} = Q.
\end{aligned}$$

2^e^ terme.

$$\begin{aligned}
\log \tfrac{1}{3} &= 9{,}52288\\
l.R' &= 5{,}80388\\
l.\tfrac{y^3}{r^3} &= 2{,}82773\\
l.Q &= 0{,}07510\\
&+\overline{8{,}22959} = 0''{,}017
\end{aligned}$$

On a donc

$$\left.\begin{array}{l}1^{\text{er}}\text{ terme } - 2148''{,}63\\ 2^{\text{e}}\ldots\ldots + \quad 0{,}02\end{array}\right\} = \begin{array}{r}100{,}^{r}000000\\ 0\;{,}214861\\ \hline\end{array}$$

$$Z' = 99^{r}{,}785139 \text{ pour l'azimuth cherché.}$$

La correction d'azimuth $0^{r}{,}214861$ s'appelle aussi l'angle de convergence des méridiens *PA*, *PB*.

Exposition de la Méthode de Delambre.

82. Je me suis attaché, dans ce qui précède, à démontrer et à appliquer les formules de Legendre qui servent à déterminer les latitudes et les longitudes des lieux situés sur le sphéroïde elliptique; mais comme les formules de Delambre, relatives à cet objet, sont elles-mêmes très-rigoureuses et qu'elles sont indépendantes des distances à la perpendiculaire et à la méridienne, je vais en développer les démonstrations avec le plus de brièveté possible.

La différence des méthodes qu'emploient ces deux géomètres, pour calculer la position respective des lieux de la terre, consiste en ce que Legendre adopte, pour distance de deux points, l'arc de grand cercle compris entre leurs verticales: tandis que Delambre prend, pour cette distance, la corde du même arc; à la vérité l'excès de l'arc sur sa corde est souvent insensible dans les opérations géodésiques, même les plus délicates: cependant, lorsqu'on vise à une grande précision, l'on ne doit point négliger d'y avoir égard (art. 65).

Supposons d'abord que la terre est sphérique, et que le triangle PAB n'est plus rectangle en A, on aura, comme l'on sait,

$$\cos PB = \cos A \sin PA \sin AB + \cos PA \cos AB,$$

ou, conformément à la notation adoptée plus haut,

$$\sin L' = \cos A \cos L \sin \varphi + \sin L \cos \varphi.$$

De là

$$\sin L - \sin L' = \sin L - \sin L \cos\varphi - \sin\varphi \cos A \cos L = (1 - \cos\varphi) \sin L - \sin\varphi \cos A \cos L$$
$$= 2\sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi \sin L - \sin\varphi \cos A \cos L.$$

Mais si l'on compte A extérieurement au triangle, c'est-à-dire, qu'on mette, au lieu de $\cos A$ sa valeur tirée de l'équation $A = 2^r - Z$, d'où $\cos A = \cos Z$, on aura

$$\sin L - \sin L' = \sin\varphi \cos Z \cos L + 2\sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi \sin L,$$

ou bien

$$2\sin\tfrac{1}{2}(L-L')=\frac{\sin\varphi\cos Z\cos L+2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\sin L}{\cos\tfrac{1}{2}(L+L')},$$

et parconséquent

$$2\sin\tfrac{1}{2}dL=\frac{\sin\varphi\cos Z\cos L+2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\sin L}{\cos(L-\tfrac{1}{2}dL)}$$

$$=\frac{\sin\varphi\cos Z\cos L+2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\sin L}{\cos\tfrac{1}{2}dL\,(\cos L+\sin L\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}dL)}.$$

Or à très-peu-près $2\sin\frac{1}{2}dL=\sin dL$, et $\cos\frac{1}{2}dL=1$; donc si l'on substitue ces valeurs dans l'équation précédente, et que l'on divise le second membre haut et bas par $\cos L$, on aura

$$\sin dL=\frac{\sin\varphi\cos Z+2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\,\text{tang}\,L}{1+\text{tang}\,L\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}dL}.$$

Faisant la division à l'aide de la formule du binome, il viendra

$$\sin dL=(\sin\varphi\cos Z+2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\,\text{tang}\,L)(1-\text{tang}\,L\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}dL+\ldots).$$

D'un autre côté, puisque dL est fort petit, on a sans erreur sensible, $\text{tang}\,\frac{1}{2}dL=\sin\frac{1}{2}dL=\frac{1}{2}\sin dL$; ainsi la formule précédente se changera en

$$(1)\ldots\text{tang}\,\tfrac{1}{2}dL=(\tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos Z+\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\,\text{tang}\,L)(1-\text{tang}\,L\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}dL+\text{tang}^2L\,\text{tang}^2\tfrac{1}{2}dL-\ldots).$$

Faisant la multiplication, mais rejetant du produit tous les termes très-petits, tels que ceux du troisième ordre et au-delà, on aura

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}dL=\tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos Z+\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\,\text{tang}\,L-\tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos Z\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}dL\,\text{tang}\,L,$$

mettant au lieu de $\text{tang}\,\frac{1}{2}dL$ sa valeur approchée $\frac{1}{2}\sin\varphi\cos Z$; on obtiendra

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}dL=\tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos Z+\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\,\text{tang}\,L-\tfrac{1}{4}\sin^2\varphi\cos^2 Z\,\text{tang}\,L.$$

Donc à cause de $\cos^2 Z=1-\sin^2 Z$,

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}dL=\tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos Z+\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\,\text{tang}\,L-\tfrac{1}{4}\sin^2\varphi\,\text{tang}\,L+\tfrac{1}{4}\sin^2\varphi\sin^2 Z\,\text{tang}\,L.$$

Mais $\frac{1}{4}\sin^2\varphi=\sin^2\frac{1}{2}\varphi$, du moins à très-peu-près; donc

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}dL=\tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos Z+\tfrac{1}{4}\sin^2\varphi\sin^2 Z\,\text{tang}\,L;\ \ldots\ldots(2)$$

donc

$$\text{tang}\, dL \text{ ou } dL = \sin\varphi \cos Z + \tfrac{1}{2} \sin^2\varphi \sin^2 Z \,\text{tang}\, L$$
$$= \varphi \cos Z + \tfrac{1}{2} \varphi \sin\varphi \sin^2 Z \,\text{tang}\, L; \quad (*)$$

donc enfin,

$$L' = L - dL = L - (\varphi \cos Z + \tfrac{1}{2} \varphi \sin\varphi \sin^2 Z \,\text{tang}\, L).$$

Telle est la latitude approchée de B, sur la terre réputée ellipsoïde de révolution. Maintenant, pour avoir égard à l'excentricité, on se rappellera que la latitude exacte de B est $1^q - PCB$; mais à cause de $PCB = PMB - NBM$, et de $PMB = 1^q - L' = 1^q - (L - dL)$, il s'ensuit que

$$\text{latitude exacte de } B = L - dL - \psi.$$

(*) dL exprime la différence des parallèles passant par les deux extrémités de l'arc φ; pour en avoir une valeur plus exacte, il faudrait conserver dans le développement de l'équation (1) les termes en $\text{tang}^2 L$, et avec un peu d'attention on trouverait

$$\sin dL = \sin\varphi \cos Z + \tfrac{1}{2} \sin^2\varphi \sin^2 Z \,\text{tang}\, L - \tfrac{1}{2} \sin^3\varphi \cos Z \sin^2 Z \,\text{tang}^2 L;$$

mais la résolution des triangles ayant donné la corde de l'arc φ, on aura

$$\sin dL = K \cos\tfrac{1}{2}\varphi \cos Z\, (1 + \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi \sin Z \,\text{tang}\, Z \,\text{tang}\, L - 2 \sin\tfrac{1}{2}\varphi \sin^2 Z \,\text{tang}^2 L).$$

Telle est là valeur de sin dL exprimée en mêmes mesures que K; pour avoir dL lui-même, il faut ajouter à cette expression l'excès de l'arc sur le sinus, c'est-à-dire

$$\frac{1}{6} \sin^3 dL = \frac{1}{6} \left\{ \frac{(K \cos\frac{1}{2}\varphi \cos Z)^3}{\rho^2} \right\},$$

ρ étant le rayon de la terre, dont la valeur en toises et en mètres a été donnée (art. 75). On peut faire aussi $\frac{1}{6} \sin^3 dL = \frac{4}{3} (K \sin^2 \frac{1}{2}\varphi \cos^2 \frac{1}{2}\varphi \cos^3 Z)$, ainsi on aura

$$dL = K \cos\tfrac{1}{2}\varphi \cos Z (1 + \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi \sin Z \,\text{tang}\, Z \,\text{tang}\, L - 2 \sin\tfrac{1}{2}\varphi \,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi \sin^2 Z \,\text{tang}^2 L + \tfrac{4}{3} \sin^2\tfrac{1}{2}\varphi \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi \cos^2 Z).$$

On calculera par cette formule, la différence en toises entre chacun des sommets des triangles qui s'étendent dans le sens de la méridienne, et en ajoutant toutes ces différences entr'elles, on aura l'arc du méridien compris entre les parallèles extrêmes. Cette méthode que Delambre a développée avec beaucoup de soin et de clarté (page 66, etc. de son Mémoire), a un avantage sur toutes les autres en ce qu'elle dispense de figure, ne demande d'autre attention que celle qui est relative aux signes algébriques des sinus, tangentes, etc., et porte avec elle sa vérification.

Substituant

Substituant pour dL sa valeur ci-dessus, et pour ψ sa valeur obtenue dans la note de l'art. 79, on aura enfin, en dénotant par L' la latitude exacte de B,

$$L'=L-(\varphi\cos Z+\tfrac{1}{2}\varphi\sin\varphi\sin^2 Z\,\mathrm{tang}\,L)\,(1+e^2\cos^2 L+\tfrac{1}{2}e^2\sin dL\sin L\cos L).$$

Dans cette formule, le terme $\frac{1}{2}e^2\sin dL\sin L\cos L$ peut être supprimé sans inconvénient, ainsi le facteur de dL se réduit à $(1+e^2\cos^2 L)$. Quant à la quantité φ, elle doit être exprimée en secondes, et à cet égard on sait qu'en désignant par K la corde d'un arc terrestre ou un côté de triangle, on a

$$\varphi=\frac{K}{\rho\sin 1''}(1-\tfrac{1}{2}e^2\sin^2 L)\ldots\ldots\ldots(\text{art. }80).$$

Passons à la recherche de l'azimuth Z', c'est-à-dire, de celui du point A sur l'horizon de B; le triangle PAB donne, par l'art. 28,

$$\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(B+A)=\frac{\cot\frac{1}{2}P\cos\frac{1}{2}(PB-PA)}{\cos\frac{1}{2}(PB+PA)}=\frac{\cot\frac{1}{2}P\cos\frac{1}{2}(L-L')}{\cos\frac{1}{2}(2^q-(L+L'))}$$

$$=\frac{\cot\frac{1}{2}P\cos\frac{1}{2}(L-L')}{\sin\frac{1}{2}(L+L')},$$

et puisque $\cot=\frac{1}{\mathrm{tang}}$, on aura

$$\cot\tfrac{1}{2}(B+A)=\mathrm{tang}\left(1^q-\tfrac{1}{2}(B+A)\right)=\frac{\mathrm{tang}\frac{1}{2}P\sin\frac{1}{2}(L+L')}{\cos\frac{1}{2}(L-L')}.$$

Comme $1^q-\frac{1}{2}(B+A)$ et P sont toujours des angles très-petits, on a plus simplement

$$1^q-\tfrac{1}{2}(B+A)=\frac{\frac{1}{2}P\sin\frac{1}{2}(L+L')}{\cos\frac{1}{2}(L-L')},$$

et de là

$$B=(2^q-A)-\frac{P\sin\frac{1}{2}(L+L')}{\cos\frac{1}{2}(L-L')}=Z-\frac{P\sin\frac{1}{2}(L+L')}{\cos\frac{1}{2}(L-L')}.$$

Cette formule donnerait la direction BA comptée du nord; pour la compter du sud à l'ouest, on y ajoutera 2^q; ainsi

$$Z'=2^q+Z-\frac{P\sin\frac{1}{2}(L+L')}{\cos\frac{1}{2}(L-L')}.$$

Le même triangle donne évidemment

$$\sin P = \frac{\sin AB \sin A}{\cos L'} = \frac{\sin \varphi \sin Z}{\cos L'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

d'où

$$Z' = 2^{\mathrm{q}} + Z - \frac{\sin\varphi \sin Z \sin\frac{1}{2}(L+L')}{\cos\frac{1}{2}(L-L')\cos L'} = 2^{\mathrm{q}} + Z - \frac{\varphi \sin Z \frac{1}{2}(2L'+dL)}{\cos L' \cos\frac{1}{2}dL}$$

$$= 2^{\mathrm{q}} + Z - \frac{\varphi \sin Z}{\cos\frac{1}{2}dL}\left(\frac{\sin L' \cos\frac{1}{2}dL + \sin\frac{1}{2}dL \cos L'}{\cos L'}\right)$$

$$= 2^{\mathrm{q}} + Z - \varphi \sin Z \operatorname{tang} L' - \varphi \sin Z \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}dL,$$

et si l'on substitue dans ce résultat, pour $\operatorname{tang}\frac{1}{2}dL$ sa valeur (2), on aura, en rejetant le terme du troisième ordre, qui est extrêmement petit, et à cause de $2\sin Z \cos Z = \sin 2Z$,

$$Z' = 2^{\mathrm{q}} + Z - \varphi \sin Z \operatorname{tang} L' - \tfrac{1}{4}\varphi \sin\varphi \sin 2Z:$$

tel est l'azimuth de A à l'égard de l'horizon de B, et auquel il n'y a rien à ajouter pour l'aplatissement, dont l'effet est insensible (art. 78).

Quant à la longitude M' du point B, il est clair qu'elle résulte de l'équation (3); car si M est la longitude du point A, on aura évidemment $P = M' - M$, et parconséquent

$$\sin P \text{ ou } \sin(M'-M) = \frac{\sin\varphi \sin Z}{\cos L'},$$

ou assez exactement

$$M' = M + \frac{\varphi \sin Z}{\cos L'}.$$

Si dans cette expression on mettait pour L' sa valeur approchée $L - \varphi\cos Z$, on aurait

$$M' = M + \frac{\varphi \sin Z}{\cos(L' - \varphi\cos Z)};$$

développant le dénominateur en faisant attention que $\varphi\cos Z$ est un petit arc, il viendra

$$M' = M + \frac{\varphi \sin Z}{\cos L(1+\varphi\cos Z \operatorname{tang} L)} = M + \frac{\varphi \sin Z}{\cos L}(1 - \varphi\cos Z \operatorname{tang} L);$$

donc enfin,

$$M' = M + \frac{\varphi \sin Z}{\cos L} - \tfrac{1}{2}\varphi^2 \sin 2Z \frac{\operatorname{tang} L}{\cos L}.$$

83. Pour récapituler tous les résultats précédens, soit

ρ le rayon de l'équateur en mètres,

e l'excentricité de l'ellipse, en supposant le demi-grand axe $= 1$,

φ l'arc exprimé en secondes, correspondant à la corde K d'un arc terrestre, c'est-à-dire, à un côté de triangle,

L la latitude connue d'une extrémité de K,

L' la latitude cherchée de l'autre extrémité,

M la longitude connue, M' la longitude cherchée } comptées du sud à l'ouest de 0^{gr}, à 400^{gr},

Z l'azimuth connu, Z' l'azimuth cherché } comptés de même,

on aura

$$\varphi = \frac{K}{\rho . \sin 1''}\left(1 - \tfrac{1}{4}e^2 \sin^2 L\right); \ldots \ldots (a)$$

$$L' = L - \left(\varphi \cos Z + \tfrac{1}{2}\varphi \sin\varphi \sin^2 Z \operatorname{tang} L\right)\left(1 + e^2 \cos^2 L\right) (b)$$

$$Z' = 200^{gr} + Z - \varphi \sin Z \operatorname{tang} L' - \tfrac{1}{4}\varphi \sin\varphi \sin 2Z \ldots \ldots (c)$$

$$M' = M + \varphi \frac{\sin Z}{\cos L'} = M + \frac{\varphi \sin Z}{\cos Z} - \tfrac{1}{2}\varphi^2 \sin 2Z . \frac{\operatorname{tang} L}{\cos L} \ldots \ldots (d)$$

dL ou différence des parallèles en mètres, $= (K \cos \tfrac{1}{2}\varphi \cos Z)$

$$+ (K \cos \tfrac{1}{2}\varphi \cos Z)(\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi \sin Z \operatorname{tang} Z \operatorname{tang} L) - 2(K \cos \tfrac{1}{2}\varphi \cos Z) \sin \tfrac{1}{2}\varphi \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi \sin^2 L \operatorname{tang}^2 L$$

$$+ \frac{(\text{somme des trois premiers termes})^3 (1 - e^2 \sin^2 L)}{6\rho^2}.$$

Le quatrième terme de cette expression est précisément l'excès de l'arc sur le sinus, c'est-à-dire, $\frac{1}{6}\frac{\sin^3 dL}{r^2}$ (note de l'art. 82); mais ici le rayon r est celui de la terre supposée sphérique; si donc, pour plus d'exactitude, on emploie le rayon de courbure de l'arc AB, ou $r = \frac{\rho}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}$, et qu'au lieu de dL on substitue sa valeur obtenue plus haut, on aura le terme dont il est question.

Lorsque, dans les 2ᵉ, 3ᵉ et 4ᵉ équations ci-dessus, l'on fait $Z = 100^{gr}$ et $\sin\varphi = \varphi$, on retrouve les premiers termes des formules analogues de l'article 80.

84. L'application des formules précédentes ne peut embarrasser nullement ceux qui sont exercés au calcul logarithmique; mais on s'épargne quelque peine en calculant ces formules à l'aide des tables III, IV, etc. qui ont été dressées dans cette vue.

Sachant, par exemple, que la latitude du Panthéon à Paris est $L = 54^{gr},274614$; que le logarithme de la distance rectiligne du Panthéon à la tour de Montlhéry est $\log K = 4,3821463$; et enfin que l'azimuth de Montlhéry sur l'horizon du Panthéon est $Z = 14^{gr},50832$, compté du sud à l'ouest; on demande la latitude et la longitude de Montlhéry, ainsi que l'azimuth du côté *Panthéon-Montlhéry* sur l'horizon du Panthéon.

Calcul de la latitude, équations (*a*) et (*b*).

Avec la latitude *L* donnée, on trouve dans la table III le logarithme...	8,9986173	
ajoutant le log. *K*...............	4,3821463	
on a log φ, ou du côté *K* réd. en sec. cent.	3,3807636	
ajoutant log. cos *Z*...............	+9,9886231	
on a log φ cos *Z*...............	3,3693867 = +2340",92	
Au log φ^2......................	6,7615272	
on ajoute log sin 1".............	4,1961200	
et l'on a $\log\varphi^2\sin 1'' = \log\varphi\sin\varphi$ ...	0,9576472 =	9",07083

Pour avoir, à un dix-millième près, le produit

$$\tfrac{1}{2}\varphi^2\sin^2 Z\sin 1'' = \tfrac{1}{2}\varphi\sin\varphi\sin^2 Z,$$

on renverse $\varphi^2\sin 1''$, puis on entre dans la table IV avec *Z*, et l'on trouve 0,02552, que l'on écrit sur $\varphi^2\sin 1''$, ainsi qu'il suit:

0,02552
38,0709

2297
18

produit $\frac{1}{2}$ φ sin φ $\sin^2 Z$ = 0",2315

On multiplie la valeur de tang L donnée par la table V, c'est-à-dire, ... 1,144186
par le produit précédent renversé. 5,1320

2288
343
11
6

à ce produit toujours positif.... +0",2648
on ajoute $\varphi \cos Z$.............+2340 ,9200

La somme que nous désignerons par m est................. 2341",1848

Maintenant, avec L, on trouve dans la table VI, 1re *part.* 0,0025816
et dans la même table, 2e *part.*, en y cherchant m,

pour 2000"............	0,0000139	}	
pour 300	021	}	0,0000163
pour 41	003	}	

Le cosinus de Z étant positif, on fait la somme des deux parties de cette dernière table, et il vient......... 0,0025979

Après avoir renversé cette somme comme à l'ordinaire,

elle devient............................ 9795,2000
et on la multiplie par............. m = 2341,1848

4,6823
1,1706
0,2107
164
21

puis on ajoute à ces produits partiels, m = 2341,1848

enfin on retranche la somme + 2347″,2669
de la latitude L.......... 54^{gr},2746,1400

et l'on a pour la lat. de Montlhéry, L' = 54^{gr},0398,87

Cette latitude L' vient d'être calculée en toute rigueur; mais on pourra, sans inconvénient, se passer de la table VI, 2ᵉ *partie*, surtout si la distance K n'est pas considérable.

Calcul de l'azimuth, équation (c).

Le calcul de l'azimuth se réduit à celui de deux termes; d'abord

log φ................ = 3,3807636
log sin Z avec son signe + 9,3339712
log tang L'.............. 0,0552667

Somme + 2,7900015 = + 616″,597.

Ensuite on entre avez Z dans la table VII, où l'on trouve 0,11004, que l'on multiplie par $\varphi \sin Z$ = 9,07083, et le produit = + 0,9978 = p.

Puis au terme précédent................. + 616″,5970
on ajoute ce dernier, pris avec le signe de sin 2Z. + 0,9978

La somme.................. 617″,5948
étant retranchée de 200 + Z 214^{gr},5083,2000

on a pour l'azimuth Z', 214^{gr},4465,60.

Calcul de la longitude, équation (*d*).

Le premier terme se calcule directement ainsi :

$$\begin{array}{lcl} \log\varphi\ldots\ldots\ldots & = & 3,3807636 \\ l.\sin Z\ldots\ldots\ldots & = & 9,3539712 \\ \text{comp.}\log\cos L & = & 0,1817272 \\ \hline \text{Somme}\ldots\ldots\ldots & & 2,9164620 = +\ 825'',015. \end{array}$$

Pour calculer le deuxième terme, on prend avec la latitude L dans la table VIII qui donne 3,477407, on multiplie cette quantité par le nombre précédent, $p = +0,9978$, le produit 3″,4697 étant positif, on le retranche de la somme ci-dessus.... 825 ,0150

et la différ. en long. entre Panthéon et Montlhéry $= +$ 821″,5453

Le calcul de la longitude serait moins long, si l'on employait pour élément L' au lieu de L.

CHAPITRE XIII.

Méthodes les plus en usage pour dresser le canevas d'une carte, et problémes relatifs à la géodésie.

85. LA méthode que l'on a employée depuis Cassini jusqu'à présent, pour rédiger le canevas général d'une grande carte ou d'un plan d'une certaine étendue, consiste à fixer sur le papier, et d'après l'échelle adoptée, tous les points dont on a les distances à la méridienne et à la perpendiculaire de la capitale de la carte. Pour cet effet, on tire deux droites perpendiculaires entre elles, l'une représentant la méridienne de cette capitale, et l'autre la ligne qui lui est perpendiculaire: puis l'on mène à chacune de ces droites des parallèles équidistantes, afin de pouvoir fixer plus commodément les lieux qui sont très-éloignés du centre de la carte.

Par exemple, dans celle de la France, dressée par Cassini, les parallèles à la méridienne et à la perpendiculaire de l'Observatoire de Paris sont tracées à 60000 toises les unes des autres: si donc un lieu était à 148000 toises à l'est de la méridienne, et à 88600 toises au sud de la perpendiculaire, pour fixer ce lieu sur la carte, il suffirait de mener vers l'est une parallèle à 28000 toises de la seconde parallèle à la méridienne, et de tracer au sud une autre parallèle à 28600 toises de la première parallèle à la perpendiculaire; l'intersection de ces deux droites serait la position du lieu proposé. Il est évident que, par ce moyen, les positions respectives des objets ne sont pas altérées, ou du moins sont absolument indépendantes les unes des autres.

Lorsque tous les points connus auront été placés de cette manière sur la carte, on joindra par des droites, ceux qui représentent

sentent les sommets des triangles, tant du premier que du second ordre; mais il conviendra, pour pouvoir mieux distinguer les premiers triangles, de les former par des lignes pleines, et de figurer les triangles secondaires par des lignes ponctuées.

La carte doit en outre être divisée en rectangles ou feuilles destinées à offrir la description particulière de la région dont elles fixent les limites. Sur la carte de la France, ces feuilles ont 40000 toises dans le sens de la perpendiculaire, et 25000 toises dans le sens de la méridienne.

Le Dépôt général de la Guerre, qui possède les plus belles collections topographiques, et auquel est spécialement confiée la direction des grandes opérations géodésiques, a définitivement adopté pour l'échelle du canevas général des cartes, deux décimètres pour un grade ou 100000 mètres, c'est-à-dire un peu moins de deux lignes pour mille toises, et il fait rapporter tous les détails topographiques à l'échelle de $\frac{1}{10000}$. Enfin, pour établir de l'uniformité dans le travail des ingénieurs qui sont chargés des levés de détail, il a fait choix d'une série de signes conventionnels, relativement au figuré du terrein et à la représentation de tous les ouvrages civils et militaires, etc. Voyez sur cet objet les numéros de son Mémorial.

Le figuré d'une petite partie de la surface du globe, suivant la méthode que nous venons d'exposer, a l'inconvénient de représenter par des rectangles des portions de fuseaux; ainsi cette projection altère de plus en plus les distances et les aires, à mesure qu'elles s'éloignent du lieu principal de la carte. Cependant, lorsque l'étendue en longitude n'est pas considérable, la convergence des perpendiculaires au méridien est peu sensible, et occasionne parconséquent, peu d'erreur dans la mesure des distances prises immédiatement sur la carte.

Si, au lieu de faire usage des distances à la méridienne et à sa perpendiculaire, pour construire le canevas d'une carte, on voulait employer à cet effet les longitudes et les latitudes des lieux des stations, on serait naturellement porté à choisir pour projection celle de *Flamsteed*, laquelle consiste à former des

quadrilatères compris entre deux arcs d'un grade, dans les deux sens, comme on le voit par les figures 46 et 47. C'est cette projection que le Dépôt général de la Guerre emploie pour former la réunion immédiate des levés de détail. Chaque quadrilatère ou section donnant les feuilles de minutes est composée, à l'échelle de $\frac{1}{10000}$, de 60 bandes dont 20 dans le sens de la latitude, et 3 dans celui de la longitude, ainsi que le représente la fig. 47. La hauteur de chaque bande est fixée à 5 décimètres; celle de la dernière bande qui est le plus au nord, la 20ᵉ par exemple, aura un peu plus ou un peu moins de 5 décimètres, suivant la valeur des grades de latitude, qui se trouve dans la 5ᵉ colonne de la table IX.

FIG. 48 D'après cette table, la longitude d'un grade *ag* est de $70922^{\text{mèt}}$ à la latitude de 50^{gr}; parconséquent *ac* ou le tiers de *ag* sera assez exactement de $23641^{\text{mèt}}$, et l'arc *bd* qui représente le tiers du grade de longitude à la latitude de $50^{\text{gr}},05$, est, d'après la même table, de $23622^{\text{mèt}},5$. Il suit de là que $ac = 2^{\text{mèt}}3641$, et que $bd = 2^{\text{m}},3622$; ainsi ayant élevé sur *ab* les deux perpendiculaires *ac*, *bd*, la droite *cd* leur sera un peu inclinée à raison de la convergence des méridiens. On formera de la même manière les deux autres bandes *cdfe*, *fegh*, dans chacune desquelles on figurera les détails du terrein; et il résultera de là qu'en rapprochant ces trois bandes, elles formeront dans le sens de la longueur *ag*, deux lignes polygonales *aceg*, *bdfh* qui différeront extrêmement peu des arcs d'un grade de longitude. L'Instruction du Dépôt général de la Guerre, citée plus haut, contient sur cette matière, d'autres détails que nous croyons devoir supprimer, parcequ'il n'entre pas dans notre plan de développer dans toute son étendue, la méthode des projections.

86. *Déterminer la position d'un lieu d'où l'on apperçoit trois points donnés sur la carte.*

FIG. 24 Si du point *D* élevé au-dessus du plan *ABC* supposé horizontal, on a observé les angles *ADB*, *ADC*, ainsi que les distances au zénith des points *A*, *B*, *C* dont on connaît les distances respectives; on réduira à l'horizon les deux premiers angles, afin que le point *D* puisse être considéré comme le pied

de la verticale abaissée du lieu de l'observation sur le plan ABC, et pour lors avec l'une des deux distances horizontales AD, BD, CD déterminées par le calcul, on fixera la projection de ce lieu : c'est ce que l'on va voir.

Nommons β, γ les réductions à l'horizon des angles observés ADC, ADB. Soient en outre $DA = D$, $DB = D'$, $DC = D''$, angles $ABD = x$, $ACD = y$, et enfin adoptons pour le triangle ABC la notation de l'art. 2.

Cela posé, les triangles ADC, ADB donneront respectivement

$$D = \frac{b \sin y}{\sin \beta}, \qquad D = \frac{c \sin x}{\sin \gamma};$$

d'où

$$\frac{b \sin \gamma}{c \sin \beta} = \frac{\sin x}{\sin y},$$

et par suite

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{b \sin \gamma + c \sin \beta}{b \sin \gamma - c \sin \beta},$$

ou bien

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y)} = \frac{1 + \frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma}}{1 - \frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma}}.$$

Or si par l'hypothèse on fait

$$\operatorname{tang} z = \frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

l'expression précédente deviendra

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y)} = \frac{1 + \operatorname{tang} z}{1 - \operatorname{tang} z} = \operatorname{tang}\left(z + \frac{1^q}{2}\right);$$

et si pour abréger on fait

$$\epsilon = \tfrac{1}{2}(x-y) \qquad S = \tfrac{1}{2}(x+y) = 2^q - \tfrac{1}{2}(A+\beta+\gamma) \ldots. \text{(2)}$$

on aura

$$\operatorname{tang} \epsilon = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y)}{\operatorname{tang}\left(z + \frac{1^q}{2}\right)} = \cot.\left(z + \frac{1^q}{2}\right) \operatorname{tang} S.$$

ϵ étant connu, on aura sur-le-champ

$$x = S + \varepsilon, \qquad y = S - \varepsilon, \qquad (3)$$

ε changerait de signe si sa tangente était négative.

Quant aux valeurs de D, D', D'', il est évident qu'elles seront données par les équations

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{b\sin y}{\sin\beta} = \frac{c\sin x}{\sin\gamma} \\ D' &= \frac{c\sin(x+\gamma)}{\sin\gamma} = \frac{a\sin(y-C)}{\sin(\beta+\gamma)} \\ D'' &= \frac{b\sin(y+\beta)}{\sin\beta} = \frac{a\sin(x-B)}{\sin(\beta+\gamma)}. \end{aligned}\right\} (4)$$

Cette solution que l'on doit à Delambre n'exige la construction d'aucune figure, et me paraît la plus simple et la plus commode de toutes celles que l'on pourrait donner du même problême.

Malgré qu'il soit aisé de se rendre compte des changemens que les formules ci-dessus éprouvent suivant la position du point D à l'égard du triangle ABC, nous ferons les remarques suivantes : 1°. si le point A était dans l'intérieur du triangle BCD, on aurait

$$S = 2^{\prime} - \tfrac{1}{2}(4^{\prime} - A + \beta + \gamma) = A - \beta - \gamma,$$

c'est-à-dire qu'il faudrait prendre le complément à 4 angles droits de l'angle A du triangle ABC.

2°. Dans la même circonstance, il faudrait mettre $x+B$ et $x+C$ dans les valeurs de D'' et de D', parceque les angles B, C seraient extérieurs au quadrilatère $DBAC$, au lieu de lui être intérieurs comme dans le premier cas.

3°. Lorsque le point D sera dans l'intérieur du triangle ABC, la somme des angles observés $\beta+\gamma$, surpassera nécessairement deux angles droits ;

4°. Si le point D était placé sur la ligne $BC = a$, la somme $\beta+\gamma$ vaudrait précisément deux angles droits, et l'on aurait

$$\sin\beta = \sin\gamma, \qquad \tan z = \frac{c}{b};$$

ε serait la différence des angles connus B, C, et alors

$$x = B, \qquad y = C.$$

Dans le même cas, on aurait

$$D' = \frac{a \sin o}{\sin o}, \qquad D'' = \frac{a \sin o}{\sin o};$$

expressions qui laissent D' et D'' indéterminées ; ainsi ces distances ne pourront être calculées que par les formules

$$D' = \frac{c \sin (B + \gamma)}{\sin \gamma}; \qquad D'' = \frac{b \sin (C + \beta)}{\sin \gamma};$$

Ce problême est non-seulement utile pour trouver la position des points secondaires d'une carte, et savoir d'avance si l'emplacement d'un signal que l'on se propose d'établir, donnera des triangles assez bien conditionnés, mais encore pour déterminer les distances qui servent d'élémens dans les réductions des angles que l'on aura observés près de ce signal : passons maintenant à son application.

Type du Calcul.

Supposons que les angles observés en D et réduits à l'horizon soient

$$\begin{aligned} \beta &= 37^{gr},6310 \\ \gamma &= 60\ ,2535 \\ \hline \beta + \gamma &= 97^{gr},8845 \end{aligned}$$

et que dans le triangle ABC

$$\begin{aligned} A &= 86^{gr},3406 \\ \log b &= 4\ ,0211893 \\ \log c &= 4\ ,1702617; \end{aligned}$$

on aura

$A =$	$86^{gr},3406$
$\beta + \gamma =$	$97,8845$
$A + \beta + \gamma =$	$184,2251$
$\frac{1}{2}(A + \beta + \gamma) =$	$92,11255$
$S \ldots\ldots =$	$107^{gr},88745$
$\varepsilon \ldots\ldots\ldots$	$-8,23024$
$x \ldots\ldots\ldots$	$99,65721$
$y \ldots\ldots\ldots$	$116,11769$
$\beta \ldots\ldots\ldots$	$37,63100$
$y + \beta \ldots\ldots$	$153,74869$
$x \ldots\ldots\ldots$	$99,65721$
$\gamma \ldots\ldots\ldots$	$60,25350$
$x + \gamma \ldots\ldots$	$159^{gr},91071$

	$\log c =$	$4,1702617$
	$l \sin \beta =$	$9,7460735$
	comp. $\log b =$	$5,9788107$
	comp. $\log \sin \gamma =$	$0,0907911$
$\log \tan z = -$	$48^{gr},9694 =$	$9,9859370$
	50	
$\log \cot$	$98,9694 =$	$8,2092480$
	$l.\tan S$	$-0,9047133$
$\log \tan \varepsilon = -$	$8^{gr},2304 =$	$-9,1139613$

On a marqué du signe — la tangente de ε, parcequ'elle résulte du produit de deux facteurs affectés de signes différens ; en effet la tangente d'un angle aigu est positive, et la tangente d'un angle obtus est négative.

Ensuite

$\log b =$	$4,0211893$	$\log c =$	$4,1702617$
$\log \sin y =$	$9,9859299$	$l.\sin x =$	$9,9999937$
$c.\log \sin \beta =$	$0,2539265$	$c.\log \sin \gamma =$	$0,0907911$
$\log D =$	$4,2610457 = 18240,85$	$\log D =$	$4,2610465 = 18240,92$
$\log c =$	$4,1702617$	$\log b =$	$4,0211893$
$\log \sin(x+\gamma) =$	$9,7700550$	$l.\sin(y+\beta) =$	$9,8223433$
$\cot \log \sin \gamma =$	$0,0907911$	$c.\log \sin \beta =$	$0,2539265$
$\log D' =$	$4,0311078 = 10742,62$	$\log D'' =$	$4,0974591 = 12515,81$

Il conviendra de calculer D' et D'' par les autres formules (4), ce qui servira de vérification ; et si l'on desire d'avoir ces distances avec plus d'exactitude, il faudra employer les logarithmes avec 8 décimales.

On détermine encore la position du point D par une construction qui dispense de tout calcul, puisqu'il ne s'agit que de décrire sur AB et AC des arcs respectivement capables des angles observés γ et β : sur quoi, voyez la Trigon. de Legendre ou celle de Lacroix.

87. Si au lieu d'observer les distances au zénith des points A, B, C, on mesurait seulement les angles $CDB=\alpha$, $CDA=\beta$, $ADB=\gamma$ qui forment les faces de la pyramide $DABC$, il est clair qu'en nommant k, k', k'' les arêtes ou distances inclinées DA, DB, DC, on aura, en vertu de la propriété du triangle obliquangle,

$$a^2 = k'^2 + k''^2 + 2k'k''\cos\alpha$$
$$b^2 = k^2 + k''^2 + 2kk''\cos\beta$$
$$c^2 = k^2 + k'^2 + 2kk'\cos\gamma.$$

La combinaison de ces équations mènerait aux valeurs k, k', k''; et parceque le volume V de la pyramide triangulaire $DABC$ est, comme nous le démontrerons tout-à-l'heure,

$$V = \tfrac{1}{3}\, kk'k''\sqrt{[\sin\Sigma\sin(\Sigma-\alpha)\sin(\Sigma-\beta)\sin(\Sigma-\gamma)]},$$

En faisant $\Sigma = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$, on aurait la hauteur H de cette pyramide en divisant le volume V par le tiers de l'aire du triangle ABC, qui est

$$= \tfrac{1}{3}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

p exprimant la moitié du périmètre de ce triangle.

Quant à la projection du point D sur le plan ABC, elle serait donnée, comme ci-dessus, par le moyen des distances horizontales D, D', D''. Or ces distances sont faciles à déterminer, puisqu'elles sont les bases des triangles rectangles dont on connaît maintenant les hypothénuses k, k', k'' et la hauteur commune H.

L'élimination sur laquelle cette solution repose en partie, ne laissant pas cependant d'être très-laborieuse, nous supposerons pour simplifier les opérations, que l'on connaît, outre les angles α, β, γ, l'un des angles que les arêtes de la pyramide font avec les côtés de la base A, B, C; alors la résolution des triangles qui forment les faces de la pyramide, et dans lesquels on connaîtra deux angles et un côté opposé à l'un d'eux, ou deux côtés et un angle, donnera les longueurs k, k', k'', et par suite le volume V de la pyramide, sa hauteur H et la projection du pied de cette hauteur.

Afin de ne rien laisser à desirer sur les principes de cette nouvelle solution, occupons-nous de la recherche du volume d'un tétraèdre donné par les trois arêtes et les angles plans de son sommet.

Dans un très-beau Mémoire sur les Pyramides, inséré parmi ceux de l'Académie de Berlin, année 1773, Lagrange a traité cette question *à priori* par une méthode purement algébrique, et avec beaucoup d'élégance; mais en déduisant le volume dont il s'agit de celui du parallélipipède qui aurait pour arêtes contiguës les arêtes mêmes du sommet du tétraèdre, le calcul sera fort simple.

FIG. 26 Concevons, par exemple, une pyramide $AMM'M''$ ayant pour base le triangle $MM'M''$, et pour sommet A l'origine des coordonnées rectangles.

Désignons par

$$xyz, \quad x'y'z', \quad x''y''z''$$

les coordonnées des points

$$M, \quad M', \quad M'';$$

par c, c', c'' les côtés de la base respectivement opposés aux angles M, M', M'';

Par $\gamma, \gamma', \gamma''$ les angles plans du sommet, opposés aux côtés c, c', c''.

Et enfin par a, a', a'' les arêtes AM, AM', AM''; on aura évidemment

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x'^2+y'^2+z'^2=a'^2 \\ x''^2+y''^2+z''^2=a''^2 \end{array}\right\}(1) \qquad \left.\begin{array}{l} (x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2=c^2 \\ (x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2=c'^2 \\ (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=c''^2 \end{array}\right\}(2).$$

Développant les premiers membres des équations (2), réduisant à l'aide des premières (1), et mettant pour c^2, c'^2.... leurs valeurs $a'^2+a''^2-2a'a''\cos\gamma$, ... on trouvera, réduction faite,

$$\left.\begin{array}{l} x'x''+y'y''+z'z''=a'a''\cos\gamma \\ xx''+yy''+zz''=aa''\cos\gamma' \\ xx'+yy'+zz'=aa'\cos\gamma'' \end{array}\right\}(3).$$

Actuellement

Actuellement si on imagine un parallélipipède dont les arêtes contiguës soient a, a', a'', et si de plus l'on suppose qu'une des faces de ce corps, la face $AM'M''$, par exemple, coïncide avec le plan des xy, de manière que l'arête a'' soit en même temps sur l'axe des x, ce qui ne peut manquer d'abréger le calcul; on aura nécessairement $z' = z'' = 0$, et z sera la hauteur du parallélipipède. Or l'aire de sa base étant $a'a'' \sin \gamma$, son volume V sera

$$V = a'a''z \sin \gamma:$$

reste donc à trouver z en fonction des données. Pour cela, reprenons la relation $xx' + yy' + zz' = aa' \cos \gamma''$ trouvée ci-dessus, laquelle se réduit à

$$xx' + yy' = aa' \cos \gamma''.$$

à cause de $z' = 0$, et nous en tirerons

$$y = \frac{aa' \cos \gamma'' - xx'}{y'}.$$

Mais il est aisé de s'assurer que $x = a \cos \gamma'$, $x' = a' \cos \gamma$; $y' = a' \sin \gamma$: donc

$$y = \frac{a(\cos \gamma'' - \cos \gamma \cos \gamma')}{\sin \gamma}.$$

D'un autre côté, si du point M on abaisse une perpendiculaire p sur l'axe des x, ou ce qui revient au même sur a'', l'expression de cette perpendiculaire sera

$$p = a \sin \gamma,$$

et à cause de

$$z = \sqrt{p^2 - y^2},$$

on aura

$$z = \frac{a}{\sin \gamma} \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 \gamma' - (\cos \gamma'' - \cos \gamma \cos \gamma')^2}.$$

Enfin le volume cherché de la pyramide, qui est évidemment le sixième du parallélipipède, sera

$$V = \frac{z}{6} a'a'' \sin \gamma = \frac{1}{6} aa'a'' \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 \gamma' - (\cos \gamma'' - \cos \gamma \cos \gamma')^2}.$$

La quantité radicale peut être mise sous une forme plus symétrique; car comme elle résulte du produit des deux facteurs

$\sin\gamma\sin\gamma'+\cos\gamma''-\cos\gamma\cos\gamma'$ et $\sin\gamma\sin\gamma'-\cos\gamma''+\cos\gamma\cos\gamma'$,

le premier devient

$$\cos\gamma''-\cos(\gamma+\gamma')=2\sin\left(\frac{\gamma+\gamma'+\gamma''}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma+\gamma'-\gamma''}{2}\right),$$

et le second

$$=\cos(\gamma-\gamma')-\cos\gamma''=2\sin\left(\frac{\gamma+\gamma'+\gamma''}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma'+\gamma''-\gamma'}{2}\right).$$

L'expression du volume V de la pyramide sera donc telle que nous l'avons donnée plus haut.

88. Avant de reprendre notre sujet, tirons quelques conséquences des considérations précédentes. D'abord, si p, q, r est la seconde extrémité de la diagonale du parallélipipède, menée par l'origine A des coordonnées, on aura, quelle que soit la position de ce corps dans l'espace

$$p=x+x'+x'',\quad q=y+y'+y'',\quad r=z+z'+z'',$$

et le quarré de cette diagonale sera

$$D^2=p^2+q^2+r^2=(x+x'+x'')^2+(y+y'+y'')^2+(z+z'+z'')^2;$$

développant et réduisant en vertu des relations (1) et (3), il viendra

$$D^2=a^2+a'^2+a''^2+2aa'\cos\gamma''+2aa''\cos\gamma'+2a'a''\cos\gamma.$$

Telle est l'expression à laquelle Legendre est parvenu par la voie de la trigonométrie sphérique (*Géométrie*, page 298). Notre calcul uniquement fondé sur la propriété du triangle rectiligne, mérite d'être connu à cause de sa simplicité.

Si le point p, q, r était pris au contraire pour le centre de la sphère circonscrite à la pyramide $AMM'M''$, et que l'on nommât f le rayon de cette sphère, on aurait ce nouveau système d'équations

$$\left.\begin{aligned}p^2+q^2+r^2&=f^2\\(p-x)^2+(q-y)^2+(r-z)^2&=f^2\\(p-x')^2+(q-y')^2+(r-z')^2&=f^2\\(p-x'')^2+(q-y'')^2+(r-z'')^2&=f^2\end{aligned}\right\}\ldots(A)$$

Développant toutes les puissances indiquées, et de la première équation soustrayant successivement la seconde, la troisième et la quatrième, on n'aura plus que les trois inconnues pqr, dont les valeurs seront données par les équations

$$2px + 2qy + 2rz - x^2 - y^2 - z^2 = 0,$$
$$2p'x + 2q'y + 2r'z - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0,$$
$$2p''x + 2q''y + 2r''z - x''^2 - y''^2 - z''^2 = 0.$$

Lagrange transforme les valeurs de p, q, r, tirées de ces trois équations, par un procédé analytique très-remarquable; mais notre but étant seulement de faire voir comment les résultats de l'analyse expriment ceux que l'on peut déduire, dans cette circonstance, de la seule géométrie, nous considérerons chacune des équations dont il s'agit, comme celle d'un plan qui aurait pqr pour coordonnées de ses points. Ces coordonnées devant être les mêmes à la commune section des trois plans, c'est-à-dire au sommet de l'angle trièdre qu'ils forment entr'eux, il s'ensuit que le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre proposé sera le sommet de cet angle.

En donnant aux équations précédentes, la forme

$$\left.\begin{array}{l} x\left(p - \frac{x}{2}\right) + y\left(q - \frac{y}{2}\right) + z\left(r - \frac{z}{2}\right) = 0 \\ x'\left(p - \frac{x'}{2}\right) + y'\left(q - \frac{y'}{2}\right) + z'\left(r - \frac{z'}{2}\right) = 0 \\ x''\left(p - \frac{x''}{2}\right) + y''\left(q - \frac{y''}{2}\right) + z''\left(r - \frac{z''}{2}\right) = 0 \end{array}\right\}, \quad (B)$$

on voit que la première équation, par exemple, est celle d'un plan assujéti à passer par un point dont les coordonnées sont $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}$, point qui est visiblement le milieu de la corde AM de la sphère. Ainsi les plans dans lesquels est situé le centre cherché passent par les milieux des arêtes du tétraèdre inscrit.

Reste maintenant à trouver la position que ces plans ont à l'égard des cordes qu'ils coupent: or les équations des projections verticales de la droite AM passant par l'origine, sont

$$\left.\begin{array}{l} p=\frac{y}{z}r \\ q=\frac{x}{z}r \end{array}\right\} \quad (C)$$

en regardant p, q, r comme les coordonnées d'un point quelconque de cette droite, et r comme la coordonnée verticale.

De plus, le plan qui passe par le milieu de AM ayant pour équation la première du système (B), ses traces sur chacun des plans coordonnés seront

$$\left.\begin{array}{l} p-\frac{x^2+y^2}{2x}=-\frac{z}{x}\left(r-\frac{z}{2}\right) \\ q-\frac{x^2+y^2}{2y}=-\frac{z}{y}\left(r-\frac{z}{2}\right) \end{array}\right\} \quad (D):$$

de la comparaison de celles-ci avec les équations (C), on conclut que les deux traces du plan sont respectivement perpendiculaires aux deux projections de la droite AM; donc le plan est perpendiculaire à la droite; donc enfin le centre de la sphère passant par quatre points donnés, est à l'intersection même des plans menés perpendiculairement aux milieux des trois droites qui joignent ces points.

Il est facile de voir que les deux premières équations (B) peuvent être mises sous la forme

$$\frac{x}{z}\left(p-\frac{x}{2}\right)+\frac{y}{z}\left(q-\frac{y}{2}\right)+\left(r-\frac{z}{2}\right)=0,$$
$$\frac{x'}{z'}\left(p-\frac{x'}{2}\right)+\frac{y'}{z'}\left(q-\frac{y'}{2}\right)+\left(r-\frac{z'}{2}\right)=0;$$

et si l'on avait à-la-fois les relations $\frac{x}{z}=\frac{x'}{z'}$, $\frac{y}{z}=\frac{y'}{z'}$, elles exprimeraient non-seulement que les plans auxquels appartiennent les équations précédentes sont parallèles, mais encore elles indiqueraient que les points A, M, M' sont en ligne droite. Il suit de là qu'il est impossible, dans l'hypothèse actuelle, de faire passer une sphère par quatre points donnés, puisque son centre ne peut être dans deux plans différens, sans se trouver sur leur intersection.

Mais ce problème admettrait une infinité de solutions, si les quatre points étaient situés sur une même circonférence, parce-qu'alors les plans menés perpendiculairement aux milieux de deux cordes quelconques de ce cercle, se couperaient tous, deux à deux, suivant une seule et même droite.

On obtient par la même théorie, et d'une manière non moins simple ni moins élégante, les équations de condition qui doivent avoir lieu lorsque, dans la transformation des axes, on passe d'un système de coordonnées orthogonales à un système de coordonnées obliques. En effet, si les côtés a, a', a'' de la pyramide que l'on considère représentent ces dernières coordonnées, et que XYZ, $X'Y'Z'$, $X''Y''Z''$ soient les angles qu'elles font avec les trois axes rectangles, on aura

$$x = a\cos X, \qquad y = a\cos Y, \qquad z = a\cos Z,$$
$$x' = a'\cos X', \qquad y' = a'\cos Y', \qquad z' = a\cos Z',$$
$$x'' = a''\cos X'', \qquad y'' = a''\cos Y'', \qquad z'' = a\cos Z'',$$

partant, les équations (3) deviendront

$$\cos X'\cos X'' + \cos Y'\cos Y'' + \cos Z'\cos Z'' = \cos\gamma$$
$$\cos X\cos X'' + \cos Y\cos Y'' + \cos Z\cos Z'' = \cos\gamma'$$
$$\cos X\cos X' + \cos Y\cos Y' + \cos Z\cos Z' = \cos\gamma''.$$

D'un autre côté, si on ajoute ensemble les quarrés des valeurs précédentes de x, y, z, de $x', y', z', \ldots$ on trouvera de la manière la plus simple, les relations connues

$$\cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1$$
$$\cos^2 X' + \cos^2 Y' + \cos^2 Z' = 1$$
$$\cos^2 X'' + \cos^2 Y'' + \cos^2 Z'' = 1:$$

celles-ci et les précédentes renferment toutes les conditions relatives aux nouveaux axes.

Nous pourrions tirer, de la théorie actuelle, d'autres conséquences non moins remarquables, et mettre en évidence plusieurs autres propriétés des pyramides; mais ce serait nous éloigner trop long-temps de notre objet: voyez d'ailleurs sur cette matière, le Mémoire cité de Lagrange, et la Géométrie de position de Carnot.

89. *Trouver la plus courte distance de deux lieux dont on connaît la longitude et la latitude géographiques.*

On demande, par exemple, la distance de Bordeaux au Cap de Bonne-Espérance.

Longitude ouest de Bordeaux............	$9^\circ.54'.14''$	comptée du méridien
Longitude est du Cap de Bonne-Espérance..	$130.18.11$	de Paris.

Différence de Longitude entre Bordeaux et
le Cap de Bonne-Espérance........$A = 133^\circ.12'.25''$

Latitude nord de Bordeaux $44^\circ.50'.14''$; sa distance au pôle $c = 55^\circ.\ 9'.46''$

Latitude sud du Cap...... $0.19.25$; sa distance au pôle $b = 90.19.25$

Soit donc A le pôle, B Bordeaux, C le Cap de Bonne-Espérance; on aura pour résoudre le triangle sphérique ABC, dans lequel on connaît deux côtés et l'angle compris, les deux formules de l'art. 30,

$$\tang \varphi = \tang c \cos A$$

$$\cos a = \frac{\cos c}{\cos \varphi} \cos(b - \varphi)$$

$\log \cos A = -\ 9,8354594$	$l.\cos(b-\varphi) = 9,8483659$
$\log \tang c = +\ 0,1574020$	$l.\cos c = 9,7568239$
$l.\tang \varphi = -\ 9,9928614$	$c.\log\cos\varphi = -\ 0,1469751$
donc $\varphi = 135^\circ.28'.15'',1$	$\cos a = -\ 9,7521649$
$b = 90.19.25$	donc $a = 124^\circ.24'.46'',1$
$b - \varphi = -\ 45^\circ.81'.50'',1$	

Le degré moyen étant de $57008^{t} = 111111^{m}$, on aura pour la plus courte distance de Bordeaux au Cap de Bonne-Espérance $111111 \times 124^\circ.24'.46''$, ou $111,11 \times 124,41 = 1382\frac{1}{3}$ myriamètres, environ.

Il est visible que l'on parviendra au même résultat, à l'aide des formules

$$\tang \varphi = \tang b \cos A,$$

$$\cos a = \frac{\cos b}{\cos \varphi} \cos(c - \varphi).$$

En effet,

$$\cos A = -\ 9{,}8354594$$
$$\text{tang}\ b = -\ 2{,}2480986$$
$$\text{tang}\ \varphi = +\ 2{,}0835580$$
$$\text{donc}\ \varphi = 89°.31'.38'',4$$
$$c = 55\ .\ 9\ .46$$
$$c - \varphi = -\ 34°.21'.52'',4$$

$$\cos(c-\varphi) = 9{,}9166976$$
$$\cos b = -\ 7{,}7518945$$
$$c.\cos\varphi = 2{,}0835710$$
$$\cos a = -\ 9{,}7521631$$
$$\text{donc}\ a = 124°.24'.45'',5$$

c'est, à $\frac{6}{10}$ de seconde près, la même valeur que ci-dessus.

90. *Déterminer l'étendue superficielle d'un pays dont on a fait la triangulation.*

Les triangles qui couvrent le pays dont on a levé la carte, présentent souvent une sorte de ramification continue autour du centre du lieu principal ; mais quand même ces triangles ne seraient pas liés immédiatement les uns aux autres, la question proposée serait toujours réduite à calculer les aires des triangles ou des quadrilatères sphériques qui composent l'aire du terrein. Si les triangles ont peu d'étendue, on les considérera comme des triangles rectilignes, et dans cette hypothèse, on sait que l'aire de chacun est égale à la moitié du produit de deux de ses côtés quelconques, par le sinus de l'angle compris; ou bien si les trois côtés sont a, b, c, et que leur demi-somme $= p$, on a, en appelant S l'aire cherchée,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Enfin si on connaît les distances à la méridienne et à la perpendiculaire des points situés sur les limites mêmes du terrein, il ne s'agira que de calculer les aires des trapèzes et des triangles rectilignes rectangles, comme on l'enseigne dans tous les livres de géométrie élémentaire.

Mais envisageons l'objet actuel sous son véritable point de vue, et pour cet effet partons de la formule connue

$$\epsilon = A + B + C - 2^r,$$

ϵ désignant l'excès des trois angles du triangle sphérique ABC sur deux droits. Lorsque l'aire de la sphère est évaluée en triangles

tri-rectangles (Géom. de Legendre, page 223), l'excès ε réduit en parties du quadrans (31), exprime l'aire même du triangle ABC; alors si S est la surface de la sphère, donnée en mesures connues, on aura ε exprimée en mêmes mesures, par le quatrième terme de cette proportion,

$$8^q : \varepsilon :: S : \frac{\varepsilon}{8^q} \cdot S,$$

puisque la surface de la sphère est composée de huit triangles tri-rectangles. Or cette surface $S = 4\pi\rho^2$, ρ étant le rayon de la sphère, et π le rapport de la circonférence au diamètre. Donc pour les triangles sphériques qui font partie de la surface du globe terrestre, on a

$$S = 4\pi \times (6366198^{\text{mèt}})^2, \quad \text{et} \quad \log \frac{S}{800} = 11{,}8038801.$$

Ainsi pour avoir l'aire d'un triangle sphérique, au logarithme de l'excès de ses trois angles sur deux angles droits, exprimé en grades ou parties de grade, on ajoutera le logarithme constant 11,8038801, et la somme sera le logarithme de l'aire du triangle, évaluée en mètres quarrés. On voit par là avec quelle promptitude on obtiendra l'aire d'un polygone décomposé en triangles dont les angles sont connus.

FIG. 1 Maintenant, supposons que les côtés b, c, qui comprennent l'angle A, soient prolongés jusqu'à ce que les arcs $A\alpha$, $B\beta$ soient égaux chacun au quart de la circonférence; alors les angles α et β seront droits, et l'aire du triangle isocèle $A\alpha\beta$, qui, en général, $= A + \alpha + \beta - 2^q$, deviendra $= A$. Il suit de là que l'aire du trapèze sphérique $\alpha\beta BC$, ou $A\alpha\beta - ABC = B + C - 2^q$.

Mais par les analogies de *Néper*, démontrées à l'art. 28, on a

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(B + C) = \cot\tfrac{1}{2}A\,\frac{\cos\frac{1}{2}(b - c)}{\cos\frac{1}{2}(b + c)}.$$

Donc si on désigne par Σ l'aire du quadrilatère dont il s'agit, on aura

$$\text{tang}\,\frac{\Sigma}{2} = \cot\left(\frac{B + C}{2}\right) = \frac{1}{\text{tang}\left(\frac{B + C}{2}\right)};$$

ensuite

ensuite

$$\text{tang}\,\frac{\Sigma}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}(b-c)}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}A;$$

et si on nomme p, p' les deux côtés $B\beta$, $C\alpha$ du quadrilatère, perpendiculaires à la base $\alpha\beta=A$, ensorte que $p=1^q-b$, $p'=1^q-c$, on aura pour la détermination de l'aire Σ, la formule

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,\Sigma=\frac{\sin\left(\frac{p+p'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{p-p'}{2}\right)}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,A.$$

Cette formule, que nous venons de démontrer d'après Lagrange (Trig. sph., page 276, 6e cahier du Journal de l'Ecole Polytech.), est très-utile pour mesurer les surfaces sphériques terminés par des arcs de grands cercles. Le moyen d'en faire l'application, est de décomposer le polygone sphérique, qui représente l'étendue du pays à mesurer, en quadrilatères formés par les longueurs des perpendiculaires à la méridienne et par les arcs de la méridienne interceptés entre ces perpendiculaires. On pourra aussi, pour les grands États, se servir avec le même avantage, des cercles de latitude et des arcs de l'équateur compris entre ces cercles. Quant à la manière de déterminer l'aire d'un triangle sphérique par les trois côtés, consultez les ouvrages cités de Lagrange et de Legendre.

CHAPITRE XIV.

De la théorie analytique de la figure de la terre.

91. Il est probable que les dimensions du globe terrestre ont été connues dans des temps fort anciens; cependant la première mesure qui ait répandu quelques lumières sur la théorie actuelle, est celle que Picard exécuta en France, vers la fin du 17e siècle.

Si la terre était parfaitement sphérique, tous les degrés des méridiens seraient égaux; mais quels que soient leurs rapports entr'eux, il est évident que si, à un point quelconque de la terre, on mesure la hauteur méridienne d'une étoile, et qu'après s'être avancé vers le pôle élevé, par exemple, on mesure encore la hauteur de la même étoile, l'arc parcouru sera d'un degré, en supposant que la différence des hauteurs méridiennes de l'étoile soit elle-même d'un degré. A la rigueur, l'angle formé par les verticales des deux stations, ou l'*amplitude* de l'arc intercepté, est égale à la différence des hauteurs méridiennes, moins l'angle sous lequel on verrait, du centre de l'étoile, l'arc parcouru (*); mais l'on a reconnu que ce dernier angle est insensible (119).

Nous avons fait voir dans les chapitres précédens comment on

FIG. 29 (*) Si l'on formait quelque doute à cet égard, soit AC la verticale, et AH l'horizon de A: soit pareillement BC la verticale, et BH' l'horizon de B. Cela posé, la hauteur méridienne de l'étoile E sur l'horizon de A sera représentée par l'angle $EAH=h$; la hauteur de cette étoile sur l'horizon de B sera de même représentée par l'angle $EBH=h'$. Or l'angle C a pour mesure l'arc AB, et comme les angles HAB, HBA sont égaux et qu'ils ont chacun pour mesure $\frac{1}{2}$ arc AB, il s'ensuit que $HAB+HBA=C$. Donc les trois angles du triangle EAB, ou $2^r=E+h+(2^r-h')+C$. Donc enfin $C=h-h'-E$.

détermine rigoureusement, par la trigonométrie, la longueur d'un arc terrestre, et nous exposerons par la suite les moyens d'observer avec précision les latitudes des extrémités de cet arc. C'est ainsi que l'on est parvenu à connaître la grandeur des degrés des méridens sous différentes latitudes, et que l'on s'est convaincu de leur accroissement de l'équateur aux pôles; il s'ensuit donc que la terre est aplatie vers les pôles, et renflée vers l'équateur. La théorie vient aussi à l'appui de cette conséquence; car en supposant que notre globe, doué d'un mouvement de rotation, ait été originairement une masse fluide, il a dû prendre, en vertu des lois de la mécanique et de la pesanteur, la forme d'un ellipsoïde de révolution; et en effet, Newton démontra que si la terre était homogène, son aplatissement serait de $\frac{1}{230}$, ce qui s'éloigne peu des observations (75). Cependant la comparaison des divers degrés mesurés à l'équateur, en France, en Pensylvanie, etc. donne lieu à décider que les méridiens sont différens entr'eux et n'ont pas la forme elliptique.

Voici le tableau de ces principaux degrés, avec les latitudes de leurs milieux, exprimées suivant la division du cercle en 400 grades.

LIEUX des Observations.	LATITUDES boréales.	LONGUEURS des grades en toises.	NOMS des Observateurs.
Le Pérou.................	..0^{gr},0000.	.51077^{t},70.	.Bouguer.
Le Cap de Bonne-Espérance.	.37 ,0093.	.51333 ,30.	.Lacaille.
La Pensylvanie...........	.43 ,5556.	.51199 ,20.	.Mason et Dixon.
L'Italie..................	.47 ,7963.	.51281 ,10.	.Boscovich et Lemaire.
La France................	.51 ,3327.	.51316 ,58.	.Delambre et Méchain.
L'Autriche...............	.53 ,0926.	.51366 ,60.	.Liesganig.
La Suède.................	.73 ,7037.	.51473 ,01.	.Melanderhielm.

C'est surtout dans ces derniers temps, et lorsqu'il a été question d'établir le système métrique en France, que les savans ont créé de nouvelles méthodes analytiques pour déterminer la

longueur du quart du méridien, d'après les nouvelles mesures des degrés, déduites de la longueur de l'arc compris entre Dunkerque et Barcelonne. La théorie que Laplace a donnée à ce sujet, dans sa Mécanique Céleste, est une des vastes conceptions de cet illustre géomètre, et c'est celle que nous allons tâcher de développer de manière à retracer la voie des démonstrations de plusieurs formules dont l'auteur suppose que l'on ait connaissance.

Méthode pour déterminer la courbe du méridien terrestre.

92. Si la terre est réellement un sphéroïde irrégulier, le méridien terrestre est une courbe à double courbure, qui cependant doit d'autant moins différer de la courbe résultant de l'intersection du plan du méridien céleste avec la surface de la terre, que cette surface s'approche plus de celle de l'ellipsoïde (art. 77).

« Pour déterminer cette courbe, représentons par $u=0$ l'équa-
» tion de la surface de la terre, u étant une fonction des trois
» coordonnées orthogonales xyz : ensorte que $u=f(x, y, z)$,
» f dénotant le signe d'une fonction. Soient $x'y'z'$ les trois coor-
» de la verticale qui passe par le lieu de la surface de la terre,
» déterminé par les coordonnées xyz », et supposons que yz soient les deux variables indépendantes. En différenciant l'équation $u=0$ dans cette hypothèse, on aura, z étant d'abord considérée comme constante,

$$\left(\frac{du}{dx}\right)dx+\left(\frac{du}{dy}\right)dy=0,$$

et ensuite y,

$$\left(\frac{du}{dx}\right)dx+\left(\frac{du}{dz}\right)dz=0.$$

Ces deux équations différentielles appartiennent respectivement aux sections faites parallèlement aux plans des xy et des xz (Calcul diff. de Lacroix, page 183), et l'on en tire

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)};\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dz}\right)}.$$

La valeur de $\frac{dy}{dx}$ est évidemment celle de la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente à la courbe de section fait avec l'axe des x; de même la valeur de $\frac{dz}{dx}$ est celle de la tangente à la seconde section; on aura donc, pour les normales relatives à chacune de ces sections,

$$\frac{dy'}{dx'}=\frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{\left(\frac{du}{dx}\right)}, \qquad \frac{dz'}{dx'}=\frac{\left(\frac{du}{dz}\right)}{\left(\frac{du}{dx}\right)},$$

ou en chassant les dénominateurs,

$$\left(\frac{du}{dx}\right)dy'-\left(\frac{du}{dy}\right)dx'=0,$$
$$\left(\frac{du}{dx}\right)dz'-\left(\frac{du}{dz}\right)dx'=0.$$

En ajoutant à la seconde équation, la première multipliée par l'indéterminée λ, on en tirera

$$dz'=\left\{\frac{\left(\frac{du}{dz}\right)+\lambda\left(\frac{du}{dy}\right)}{\left(\frac{du}{dx}\right)}\right\}dx'-\lambda dy';$$

or celle-ci et les deux précédentes peuvent se mettre sous la forme

$$\left.\begin{array}{c} dy'=\frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{\left(\frac{du}{dx}\right)}dx', \qquad dz'=\frac{\left(\frac{du}{dz}\right)}{\left(\frac{du}{dx}\right)}dx' \\ \lambda\left(\frac{du}{dx}\right)dy'+\left(\frac{du}{dx}\right)dz'-\left\{\left(\frac{du}{dz}\right)+\lambda\left(\frac{du}{dy}\right)\right\}dx'=0; \end{array}\right\} (Z)$$

et l'on sait que qnand les équations d'une droite sont

$$x=az, \qquad y=bz,$$

et que l'équation du plan est

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

on a l'équation de condition

$$Aa + Bb + C = 0,$$

lorsque la droite est parallèle au plan (Feuilles d'Analyse de Monge).

Cette dernière équation se vérifiant à l'aide de celles (Z), puisque l'on a

$$\begin{array}{l} \lambda\left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{du}{dz}\right) - \left(\frac{du}{dz}\right) - \lambda\left(\frac{du}{dy}\right) = 0, \\ Aa \;+\; Bb \;+\; C \qquad\qquad\quad = 0, \end{array}$$

il s'ensuit que le plan quelconque donné par la troisième équation (Z) est parallèle à la normale menée par le point $x'y'z'$, c'est-à-dire, est parallèle à la verticale passant par ce même point. « Cette verticale, prolongée à l'infini, se réunissant au méridien » céleste, tandis que son pié n'est éloigné que d'une quantité » finie, du plan de ce méridien, elle peut être censée parallèle à » ce plan (art. 70). L'équation différentielle de ce plan peut » donc coïncider avec la précédente, en déterminant convenable» ment l'indéterminée λ. Soit

$$dz' = adx' + bdy',$$

» l'équation du plan du méridien céleste; en la comparant à la » précédente, on en tirera

$$\left(\frac{du}{dz}\right) - a\left(\frac{du}{dx}\right) - b\left(\frac{du}{dy}\right) = 0. \qquad (a)$$

» Pour avoir les constantes a et b, on supposera connues, les » coordonnées du pié de la verticale parallèle à l'axe de rotation » de la tere, et celle d'un lieu donné de sa surface. En substi» tuant successivement ces coordonnées dans l'équation précé» dente, on aura deux équations au moyen desquelles on déter» minera a et b. L'équation précédente, combinée avec celle de » la snrface, $u = 0$, donnera la courbe du méridien terrestre qui » passe par le lieu donné ».

Si la terre était un ellipsoïde quelconque, u serait une fonc-

tion rationelle et entière du second degré en xyz; c'est-à-dire que l'on aurait en général

$$\left.\begin{array}{l} Ax^2 + By^2 + Cz^2 \\ + A'x + B'y + C'z \\ + A''xy + B''xz + C''yz \\ + D \end{array}\right\} = u.$$

L'équation (a), dans laquelle $\left(\frac{du}{dz}\right)$, $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{du}{dy}\right)$ sont des différentielles partielles de u, appartiendrait alors à un plan dont l'intersection avec la surface de la terre formerait le méridien terrestre; mais dans le cas général, ce méridien, comme nous l'avons dit, est une courbe à double courbure, et diffère de la ligne déterminée par les mesures géodésiques.

Nous n'expliquerons pas comment on peut tracer cette ligne sur la terre, parceque l'opération qu'il s'agit de faire à ce sujet est suffisamment indiquée dans les articles (70 et 124). Nous observerons cependant que les lignes tracées par les opérations géodésiques ont la propriété d'être les plus courtes que l'on puisse mener sur la surface du sphéroïde; leur premier côté, dont la direction peut être supposée quelconque, est tangent à la surface de la terre; leur second côté est le prolongement de cette tangente, plié suivant la verticale; leur troisième côté est de même le prolongement du second côté, plié suivant la verticale, et ainsi de suite.

« Voyons maintenant quelles lumières peuvent donner sur la » figure de la terre, les mesures géodésiques faites, soit dans le » sens des méridiens, soit dans le sens perpendiculaire aux mé- » ridiens. On peut toujours concevoir un ellipsoïde, tangent à » chaque point de la surface terrestre, et sur lequel les mesures » géodésiques, les longitudes et les latitudes, à partir du point » de contingence, dans une petite étendue, seraient les mêmes » qu'à cette surface. Si la surface entière était celle d'un ellip- » soïde, l'ellipsoïde tangent serait partout le même; mais si, » comme on a lieu de le croire, la figure des méridiens n'est » pas elliptique, alors l'ellipsoïde tangent varie d'un pays à l'autre,

» et ne peut être déterminé que par des mesures géodésiques faites » dans des sens différens. Il serait très-intéressant de connaître ainsi, » les ellipsoïdes osculateurs d'un grand nombre de lieux sur la » terre ».

Equations de la plus courte distance sur la surface de la terre.

« Soit $u = x^2 + y^2 + z^2 - 1 - 2\alpha u' = 0$, l'équation de la sur- » face du sphéroïde que nous supposerons différer très-peu d'une » sphère dont le rayon est l'unité, ensorte que α est un très-petit » coefficient dont nous négligerons le quarré (Note de l'art. 76). » u' peut toujours être considéré comme fonction des deux seules » variables x et y; car en le supposant fonction de x, y, z, on » peut en éliminer z, au moyen de l'équation $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ », que l'on obtient dans l'hypothèse que la terre est une sphère. Cela posé, si l'on différencie successivement, par rapport à xyz, l'équation précédente en u, on en tirera

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 2x - 2\alpha\left(\frac{du'}{dx}\right) = 0$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = 2y - 2\alpha\left(\frac{du'}{dy}\right) = 0$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right) = 2z;$$

substituant ces valeurs dans les équations

$$\left(\frac{du}{dx}\right) ddy - \left(\frac{du}{dy}\right) ddx = 0$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right) ddz - \left(\frac{du}{dz}\right) ddx = 0$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) ddz - \left(\frac{du}{dz}\right) ddy = 0,$$

qui sont celles de la ligne la plus courte sur la surface de la terre, (Calcul des variations, par Lacroix), on aura

xd^2y

$$\left.\begin{aligned} xd^2y - yd^2x &= \alpha\left(\frac{du'}{dx}\right)d^2y - \alpha\left(\frac{du'}{dy}\right)d^2x\,; \\ xd^2z - zd^2x &= \alpha\left(\frac{du'}{dx}\right)d^2z\,; \\ yd^2z - zd^2y &= \alpha\left(\frac{du'}{dy}\right)d^2z\,; \end{aligned}\right\} (O)$$

nous désignerons cette ligne sous le nom de *ligne géodésique*.

« Nommons r, le rayon mené du centre de la terre à sa sur- FIG.80
» face; θ l'angle que ce rayon fait avec l'axe de rotation que
» nous supposerons être celui des z, et φ l'angle que le plan
» formé par cet axe et par r, fait avec le plan des xz; on aura

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\,;\quad y = r\sin\theta\sin\varphi\,;\quad z = r\cos\theta\,;\qquad (A)$$

différentiant les deux premières par rapport à φ, il viendra

$$dx = -r\sin\theta\sin\varphi\,d\varphi\,,\qquad dy = r\sin\theta\cos\varphi\,d\varphi\,;$$

multipliant ces quatre équations en croix, on obtiendra

$$xdy - ydx = r^2\sin^2\theta d\varphi\,(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = r^2\sin^2\theta d\varphi. \qquad (1)$$

Différentiant la première et la troisième équation (A), on aura, en considérant seulement x, z et θ comme variables,

$$dx = r\cos\theta\cos\varphi\,d\theta\,,\qquad dz = -r\sin\theta\,d\theta\,;$$

de là on tire, par le même procédé que ci-dessus,

$$\left.\begin{aligned} xdz - zdx &= -r^2\sin^2\theta\cos\varphi d\theta - r^2\cos^2\theta\cos\varphi d\theta \\ &= -r^2\cos\varphi d\theta\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = -r^2\cos\varphi d\theta \end{aligned}\right\}. \quad (2)$$

Différentiant pareillement la deuxième et la troisième équation (A), on aura

$$dy = r\cos\theta\sin\varphi d\theta\,,\qquad dz = -r\sin\theta d\theta\,;$$

et comme ci-dessus,

$$\left.\begin{aligned} ydz - zdy &= -r^2\sin^2\theta\sin\varphi d\theta - r^2\cos^2\theta\sin\varphi d\theta \\ &= -r^2\sin\varphi d\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = -r^2\sin\varphi d\theta \end{aligned}\right\}. \quad (3)$$

Enfin les équations (2) et (3) étant multipliées respectivement par $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$, donneront, en les ajoutant,

$$\left.\begin{array}{r}(xdz-zdx)\cos\varphi+(ydz-zdy)\sin\varphi=-r^2d\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\\ =-r^2d\theta\end{array}\right\}. \quad (4)$$

Maintenant si l'on fait tout varier dans les équations (A), on aura

$$dx=dr\sin\theta\cos\varphi+r\cos\theta\cos\varphi d\theta-r\sin\theta\sin\varphi d\varphi$$
$$dy=dr\sin\theta\sin\varphi+r\sin\theta\cos\varphi d\varphi+r\cos\theta\sin\varphi d\varphi$$
$$dz=dr\cos\theta-r\sin\theta d\theta.$$

Quarrant toutes ces équations, ajoutant et réduisant au moyen des équations $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, on obtiendra, à cause de $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$,

$$ds^2=dr^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2+r^2d\theta^2. \quad (5)$$

« En considérant ensuite u' comme fonction de x et de y, et » désignant par ψ la latitude du point M' (*fig.* 30), on peut sup- » poser dans cette fonction, $r=1$ et $\psi=100^\circ-\theta$, ce qui donne, » au lieu des équations (A),

$$x=\cos\psi\cos\varphi, \qquad y=\cos\psi\sin\varphi; \quad (B)$$

et puisque u' est fonction de x, y, il l'est aussi de ψ et φ; on a donc

$$u'=f(x,y); \qquad u'=f(\psi,\varphi);$$

différentiant ces équations, il vient

$$du'=\left(\frac{du'}{dx}\right)dx+\left(\frac{du'}{dy}\right)dy$$
$$du'=\left(\frac{du'}{d\psi}\right)d\psi+\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)d\varphi;$$

donc $$\left(\frac{du'}{dx}\right)dx+\left(\frac{du'}{dy}\right)dy=\left(\frac{du'}{d\psi}\right)d\psi+\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)d\varphi:$$

« mais on a, en vertu des équations (B),

$$x^2+y^2=\cos^2\psi, \qquad \frac{y}{x}=\tang\varphi,$$

» d'où l'on tire par la différentiation,

$$d\psi = -\frac{(xdx+ydy)}{\sin\psi\cos\psi}, \qquad d\varphi = \frac{xdy-ydx}{x^2}.\cos^2\varphi.$$

» En substituant ces valeurs dans l'équation différentielle précédente
» en u', et comparant séparément les coefficiens de dx et de dy,
» on aura

$$\left(\frac{du'}{dx}\right) = -\frac{\cos\varphi}{\sin\psi}\left(\frac{du'}{d\psi}\right) - \frac{\sin\varphi}{\cos\psi}\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)$$
$$\left(\frac{du'}{dy}\right) = -\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\left(\frac{du'}{d\psi}\right) + \frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\left(\frac{du'}{d\varphi}\right);$$

soustrayant la seconde de la première, après avoir multiplié l'une et l'autre respectivement par ddy, ddx, on aura, en faisant attention que les relations (B) donnent

$$\cos\varphi = \frac{x}{\cos\psi}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\cos\psi};$$

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{du'}{dx}\right)ddy - \left(\frac{du'}{dy}\right)ddx = &-\frac{\left(\frac{du'}{d}\right)}{\sin\psi\cos\psi}(xddy - yddx)\\ &-\frac{\left(\frac{du'}{d\psi}\right)}{\cos^2\psi}(xddx+yddy)\end{aligned}\right\}(C)$$

Or en négligeant dans les équations (O) les quantités de l'ordre α; on a

$$xddy - yddx = 0.$$

De plus, les deux équations $xddz - zddx = 0$, $yddz - zddy = 0$ étant multipliées respectivement par zx, zy et ensuite ajoutées entr'elles, donnent

$$zddz = z^2\,\frac{(xddx+yddy)}{x^2+y^2}.$$

L'équation $x^2+y^2+z^2 = 1$ fournit, en la différentiant deux fois de suite et en regardant dx, dy, dz comme variables,

$$xddx + yddy + zddz + (dx^2+dy^2+dz^2) = 0;$$

ou à cause de

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$
$$xd^2x + yd^2y + zd^2z + ds^2 = 0.$$

En substituant ici pour zd^2z sa valeur précédente, on aura

$$xd^2x + yd^2y + \frac{z^2(xd^2x + yd^2y)}{x^2 + y^2} + ds^2 = 0;$$

ou bien

$$(xd^2x + yd^2y)(x^2 + y^2 + z^2) = -ds^2(x^2 + y^2);$$

ou encore

$$xd^2x + yd^2y = -ds^2 \cos^2\psi.$$

Partant, l'équation (C) devient, à cause de $xd^2y - yd^2x = 0$, du moins à très-peu-près,

$$\left(\frac{du'}{dx}\right) ddy - \left(\frac{du'}{dy}\right) ddx = \left(\frac{du'}{d\varphi}\right) ds^2.$$

La première des équations (O) donnera ainsi en l'intégrant,

$$\int (xddy - yddx) = \int \alpha \left(\frac{du'}{d\varphi}\right) ds^2 = \int d.(xdy - ydx) = (xdy - ydx) + const.$$

c'est-à-dire, à cause de l'équation précédente (1),

$$r^2 d\varphi \sin^2\theta = cds + \alpha ds \int ds \left(\frac{du'}{d\varphi}\right); \qquad (p)$$

c étant une constante arbitraire.

La seconde des équations (O) donne évidemment

$$d.(xdz - zdx) = \alpha \left(\frac{du'}{dx}\right) ddz:$$

si nous reprenons celle obtenue plus haut,

$$zddz = \frac{z^2(xddx + yddy)}{x^2 + y^2},$$

on aura sur-le-champ, en réduisant et en y substituant pour $x^2 + y^2$, et $xddx + yddy$ leurs valeurs trouvées précédemment,

$$ddz = \frac{z(xddx + yddy)}{x^2 + y^2} = -zds^2.$$

mais à cause de $x^2+y^2+z^2=1$, on a

$$z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}=\sqrt{1-\cos^2\psi}=\sin\psi;$$

donc

$$ddz=-\sin\psi\, ds^2.$$

partant

$$d.(xdz-zdx)=-\alpha ds^2\left(\frac{du'}{dx}\right)\sin\psi,$$

on a pareillement

$$d.(ydz-zdy)=-\alpha ds^2\left(\frac{du'}{dy}\right)\sin\psi.$$

L'équation (4) deviendra, en vertu de ces valeurs intégrées,

$$\begin{aligned} r^2 d\theta &= c' ds \sin\varphi + c'' ds \cos\varphi \\ &+ \alpha ds \cos\varphi \int ds \left(\frac{du'}{dx}\right)\sin\psi \\ &+ \alpha ds \sin\varphi \int ds \left(\frac{du'}{dy}\right)\sin\psi; \end{aligned}$$

et substituant pour $\left(\frac{du'}{dx}\right)$, $\left(\frac{du'}{dy}\right)$ leurs valeurs précédentes, on aura

$$\begin{aligned} r^2 d\theta &= c' ds.\sin\varphi + c'' ds.\cos\varphi \\ &- \alpha ds \cos\varphi \int ds \left\{\left(\frac{du'}{d\psi}\right)\cos\varphi + \left(\frac{du'}{d\varphi}\right)\sin\varphi \tang\psi\right\} \\ &- \alpha ds \sin\varphi \int ds \left\{\left(\frac{du'}{d\psi}\right)\sin\varphi - \left(\frac{du'}{d\varphi}\right)\cos\varphi \tang\psi\right\}. \quad (q) \end{aligned}$$

Recherche de l'expression de l'arc du méridien terrestre.

94. « Considérons d'abord le cas dans lequel le premier côté de la » ligne géodésique est parallèle au plan correspondant du méridien » céleste. Dans ce cas, $d\varphi$ est de l'ordre α, ainsi que dr; on a » donc, en négligeant les quantités de l'ordre α^2 dans l'équation (5), » $ds=-r d\theta$, l'arc s étant supposé croître de l'équateur aux » pôles ». ψ exprimant la latitude, il est facile de voir (et j'ai d'ailleurs démontré, dans le cinquième n° du Mémorial du Dépôt

général de la Guerre, page 176), que l'on a $\theta = 100^\circ - \psi - \left(\frac{dr}{d\psi}\right)$; ce qui donne par la différentiation,

$$d\theta = -d\psi - d.\left(\frac{dr}{d\psi}\right).$$

D'ailleurs, à cause de $x^2+y^2+z^2-1-2\alpha u'=0$, on a $r^2-1-2\alpha u'=0$, et parconséquent $dr=\alpha\frac{du'}{r}$, ou simplement $dr=\alpha du'$, puisque $r=1$ à très-peu-près. D'un autre côté, puisque

$$r=\sqrt{2\alpha u'+1}=(2\alpha u'+1)^{\frac{1}{2}}=(1+2\alpha u')^{\frac{1}{2}}=1+\alpha u',$$

on aura, en substituant dans $ds=-rd\theta$ pour $d\theta$ et r leurs valeurs précédentes,

$$ds=rd\psi\left(1+\alpha\left(\frac{d^2u'}{d\psi^2}\right)\right)=(1+\alpha u')d\psi\left\{1+\alpha\left(\frac{d^2u'}{d\psi^2}\right)\right\}$$
$$=d\psi\left\{1+\alpha u'+\alpha\left(\frac{d^2u'}{d\psi^2}\right)\right\}.$$

en négligeant toutefois les quantités de l'ordre α^2.

Pour intégrer cette équation, soit $\left\{1+\alpha u'+\alpha\left(\frac{d^2u'}{d\psi^2}\right)\right\}=X$, on aura $s=\int Xd\psi$. Or on sait, par la méthode générale des intégrales approchées (Calcul diff. et intég. de Lacroix), que

$$Y_1-Y=Y'\frac{(a_1-a)}{1}+Y''\frac{(a_1-a)^2}{1.2}+\ldots\ldots=X(a_1-a)+\frac{dX}{dx}\frac{(a_1-a)^2}{1.2}+\ldots$$

Parconséquent, entre les limites ψ et ψ_1 qui représentent les latitudes des deux extrémités de l'arc s, on aura

$$s=\left(1+\alpha u'_1+\alpha\left(\frac{d^2u'}{d\psi^2}\right)\right)\epsilon+\frac{\alpha\epsilon^2}{1.2}\left(\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right)+\left(\frac{d^3u'_1}{d\psi^3}\right)\right)+\ldots$$
$$=\epsilon+\alpha\epsilon\left\{u'_1+\left(\frac{d^2u'_1}{d\psi^2}\right)\right\}+\frac{\alpha\epsilon^2}{1.2}\left\{\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right)+\left(\frac{d^3u'_1}{d\psi^3}\right)\right\}+\ldots\ldots$$

ϵ désignant $\psi-\psi_1$, c'est-à-dire la différence en latitude des deux points extrêmes de l'arc s, et u'_1 étant ici la valeur de u' à l'origine de s.

Examen de l'écart du méridien terrestre, du plan d'un même méridien céleste.

95. « Lorsque la terre est un solide de révolution, la ligne » géodésique est toujours dans le plan d'un même méridien; elle » s'en écarte si les parallèles ne sont pas des cercles; l'observa- » tion de cet écart peut donc nous éclairer sur ce point impor- » tant de la théorie de la terre. Reprenons l'équation (p) et obser- » vons que dans le cas présent $d\varphi$ et la constante c de cette équation » sont de l'ordre α, et que l'on peut y supposer $r=1$, $ds=d\psi$ et » $\theta=100^\circ-\psi$; on aura ainsi

$$d\varphi\cos^2\psi=cd\psi+\alpha d\psi\int d\psi\left(\frac{du'}{d\varphi}\right). \qquad (p')$$

» Maintenant si l'on nomme V, l'angle que fait le plan » du méridien céleste avec celui des xz, d'où l'on compte » l'origine de l'angle φ; on aura visiblement $\frac{dy'}{dx'}=\text{tang}\,V$, » (*fig.* 31), $x'y'z'$ étant les coordonnées de ce méridien, dont on » a vu ci-dessus que l'équation différentielle est

$$dz'=adx'+bdy':$$

en la comparant à la précédente, qui peut se mettre sous la forme

$$0=dy'-\text{tang}\,Vdx',$$

on voit que a et b sont infinis : en effet, dans celle-ci la différentielle dz' est censée n'avoir disparu que parceque son coefficient$=0$, on peut donc écrire

$$0\times dz'=dy'-\text{tang}\,Vdx',$$

ou bien

$$dz'=-\frac{\text{tang}\,V}{0}dx'+\frac{1}{0}dy'.$$

on a donc

$$a=-\frac{\text{tang}\,V}{0}, \quad \text{et} \quad b=\frac{1}{0}.$$

Divisant ces deux dernières équations l'une par l'autre, on

obtient

$$-\frac{a}{b}=\text{tang}\,V;$$

et puisque a et b sont infinis, l'équation (a), se réduit à

$$a\left(\frac{du}{dx}\right)+b\left(\frac{du}{dy}\right)=0,\ \text{ ou bien à }\ \frac{a}{b}\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)=0;$$

donc

$$\left(\frac{du}{dx}\right)\text{tang}\,V-\left(\frac{du}{dy}\right)=0.$$

Eliminant les coefficiens différentiels dont nous avons trouvé la valeur, on tirera

$$0=x\,\text{tang}\,V-y-\alpha\left(\frac{du'}{dx}\right)\text{tang}\,V+\alpha\left(\frac{du'}{dy}\right).$$

On peut supposer $V=\varphi$ dans les termes multipliés par α; de plus, $\frac{y}{x}=\text{tang}\,\varphi$, on a donc, en divisant par x, l'équation précédente,

$$\text{tang}\,\varphi-\text{tang}\,V=\frac{\alpha\left(\frac{du'}{dy}\right)-\alpha\left(\frac{du'}{dx}\right)\text{tang}\,V}{\cos\psi\cos\varphi}=\frac{\alpha\left(\frac{du'}{dy}\right)\cos\varphi-\alpha\left(\frac{du'}{dx}\right)\sin\varphi}{\cos\psi\cos\varphi\cos\varphi};$$

substituant pour $\left(\frac{du'}{dx}\right)$, $\left(\frac{du'}{dy}\right)$ leurs valeurs (pag. 195), on aura, après la réduction qui se présente naturellement,

$$\text{tang}\,\varphi-\text{tang}\,V=\frac{\alpha\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}{\cos^2\psi\cos^2\varphi}=\frac{\alpha\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)}{\cos^2\psi\cos^2\varphi};$$

ou bien

$$\cos\psi\cos\varphi\,(\text{tang}\,\varphi-\text{tang}\,V)=\frac{\alpha\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)}{\cos\psi\cos\varphi};\qquad (D)$$

mais par les formules trigonométriques connues,

$$\text{tang}\,\varphi-\text{tang}\,V=\frac{\sin(\varphi-V)}{\cos\varphi\cos V}=\frac{\sin(\varphi-V)}{\cos\varphi\cos\varphi};$$

à cause de $\cos V=\cos\varphi$, à très-peu-près; donc l'équation (D) deviendra, réduction faite,

sin

$$\sin(\varphi - V) = \frac{\alpha\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)}{\cos^2\psi}, \text{ ou } \varphi - V = \frac{\alpha\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)}{\cos^2\psi},$$

puisque $\varphi - V$ est un très-petit arc.

Il est facile de voir, en considérant les arcs PM, PM' comme des portions de circonférence, que l'on a $MM' = (\varphi - V)\cos\psi$; FIG. 31 c'est la distance de l'origine de la courbe au plan du méridien céleste; et comme le premier côté de la ligne géodésique est supposé parallèle au plan de ce méridien, les différentielles de l'angle V et de la distance dont on vient de parler, doivent être nulles à cette origine : on a donc à ce point

$$d.(\varphi - V)\cos\psi = d\varphi\cos\psi - (\varphi - V)\sin\psi\, d\psi = 0; \quad (E)$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = (\varphi - V)\,\text{tang}\,\psi;$$

et en éliminant $\varphi - V$, à l'aide de sa valeur précédente, on a

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = (\varphi - V)\,\text{tang}\,\psi = \frac{\alpha\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)\text{tang}\,\psi}{\cos^2\psi}.$$

D'un autre côté, l'équation (p') donne

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{c}{\cos^2\psi} + \frac{\alpha\int d\psi\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)}{\cos^2\psi};$$

donc

$$\frac{\alpha\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)\text{tang}\,\psi}{\cos^2\psi} = \frac{c}{\cos^2\psi} + \frac{\alpha\int d\psi\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)}{\cos^2\psi};$$

donc, à cause que $u'_{,}$ et $\psi_{,}$ se rapportent à l'origine de l'arc s,

$$c = \alpha\left(\frac{du'_{,}}{d\varphi}\right)\text{tang}\,\psi_{,},$$

et enfin

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{\alpha\left(\frac{du_{,}}{d\varphi}\right)\text{tang}\,\psi_{,}}{\cos^2\psi} + \frac{\alpha\int d\psi\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)}{\cos^2\psi}. \quad (F)$$

Il est visible qu'à l'extrémité q de l'arc mesuré, le côté mq de la courbe, fait avec le plan du méridien céleste mn, un angle nmq, à très-peu-près égal à $\frac{nq}{mn}$; puisque l'on peut prendre l'arc pour la tangente, dans le cas actuel; on a donc

$$\frac{nq}{mn}=\frac{d.(\varphi-V)\cos\psi}{d\psi},$$

V étant supposé constant dans la différentiation; en désignant donc cet angle par ϖ, on aura, en vertu de l'équation (E),

$$\varpi=\frac{d\varphi}{d\psi}\cos\psi-(\varphi-V)\sin\psi;$$

si l'on remplace $\frac{d\varphi}{d\psi}$ par sa valeur, et que l'on élimine $\varphi-V$, on aura

$$\varpi=\frac{\alpha\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)\text{tang}\,\psi_1}{\cos\psi}+\frac{\alpha\int d\psi\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)}{\cos\psi}-\frac{\alpha\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)\text{tang}\,\psi}{\cos\psi}$$

$$=\frac{\alpha}{\cos\psi}\left\{\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)\text{tang}\,\psi_1-\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)\text{tang}\,\psi+\int d\psi.\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)\right\},$$

« l'intégrale étant prise depuis l'origine de l'arc mesuré jusqu'à » son extrémité ».

Pour intégrer le dernier terme de cette équation, soit $\psi=\psi_1+\epsilon$, ou bien $\psi_1=\psi-\epsilon=\psi-d\psi$, et soit en outre u'_1 ce que devient u' lorsque ψ se change en ψ_1; on aura d'abord par la méthode des intégrales approchées, et en négligeant les puissances de ϵ,

$$\int d\psi\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)=\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)\epsilon+\ldots\ldots$$

partant

$$\varpi=\frac{\alpha}{\cos\psi}\left\{\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)\text{tang}\,(\psi-\epsilon)-\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)\text{tang}\,\psi+\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)\epsilon\right\}$$

$$=\frac{\alpha}{\cos\psi}\left\{\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)\frac{\text{tang}\,(\psi-\epsilon)}{1+\epsilon\,\text{tang}\,\psi}-\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)\text{tang}\,\psi+\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)\epsilon\right\};$$

réduisant tous les termes au même dénominateur, et développant $\frac{du'_1}{d\varphi}$ qui donne $\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)+\left(\frac{d^2u'}{d\varphi d\psi}\right)d\psi+\ldots$, puisque u' est fonc-

tion de ψ, on aura

$$\varpi = -\frac{\alpha \tang \psi}{\cos\varphi(1+\varepsilon \tang \psi)}\left\{\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)\tang\psi.\varepsilon + \left(\frac{d^2u'}{d\varphi d\psi}\right)d\psi\right\}$$
$$= -\frac{\alpha \tang \psi}{\cos\varphi}\left\{\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)\tang\psi.\varepsilon + \left(\frac{d^2u'}{d\varphi d\psi}\right)\varepsilon\right\}(1+\varepsilon\tang\psi)^{-1};$$

ou simplement

$$\varpi = -\frac{\alpha\varepsilon \tang \psi}{\cos\varphi}\left\{\left(\frac{du'}{d\varphi}\right).\tang\psi + \left(\frac{d^2u'}{d\varphi d\psi}\right)\right\};$$

« les valeurs de ψ, $\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)$ et $\left(\frac{d^2u'}{d\varphi d\psi}\right)$ devant se rapporter ici, pour » plus d'exactitude, au milieu de l'arc mesuré. L'angle ϖ doit » être supposé positif, lorsqu'il s'écarte du méridien, dans le » sens des accroissemens de φ ».

Expression de la différence en longitude, des deux méridiens célestes passant par les extrémités d'un arc du méridien terrestre.

96. « Pour avoir la différence en longitude, des deux méridiens » correspondans aux extrémités de l'arc, nous observerons que » u'_1, V_1, ψ_1, φ_1 étant les valeurs de u', V, ψ et φ à la pre- » mière extrémité, on a, en vertu de ce qui précède,

$$\varphi_1 - V_1 = \frac{\alpha\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)}{\cos^2\psi_1}, \qquad \varphi - V = \frac{\alpha\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)}{\cos^2\psi}. \quad (G)$$

Mais à très-peu-près $\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{\alpha\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)\tang\psi_1}{\cos^2\psi_1}$; $c = \alpha\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)\tang\psi_1$, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus; et comme on peut faire $d\varphi = \varphi - \varphi_1$, $d\psi = \psi - \psi_1 = \varepsilon$, on a

$$\varphi - \varphi_1 = \frac{c.\varepsilon}{\cos^2\psi_1};$$

parconséquent si l'on soustrait l'une de l'autre les équations (G), on aura

$$V-V_1-(\varphi-\varphi_1)=\frac{\alpha\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)}{\cos^2\psi_1}-\frac{\alpha\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)}{\cos^2\psi};$$

et si on élimine $(\varphi-\varphi_1)$, on obtiendra

$$V-V_1=\frac{\alpha\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)}{\cos^2\psi_1}-\frac{\alpha\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)}{\cos^2\psi}-\frac{\alpha\epsilon\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)\text{tang}\,\psi_1}{\cos^2\psi_1}$$

$$=-\frac{\alpha\epsilon\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)\text{tang}\,\psi_1}{\cos^2\psi_1}-\frac{\alpha}{\cos^2\psi_1}\left\{\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)-\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)\right\},$$

à canse que $\cos\psi=\cos\psi_1$ à fort peu-près.

Mais

$$\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)-\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)=\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi d\psi}\right)d\psi=\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi d\psi}\right)\epsilon;$$

donc

$$V-V_1=-\frac{\alpha\epsilon}{\cos^2\psi_1}\left\{\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)\text{tang}\,\psi_1+\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi d\psi}\right)\right\}.$$

Enfin multipliant ces deux membres par $\sin\psi_1$, et faisant attention à la valeur de ϖ, on aura

$$(V-V_1).\sin\psi_1=\varpi.$$

« Ainsi l'on peut, par l'observation seule, et indépendamment de
» la connaissance de la figure de la terre, déterminer la diffé-
» rence en longitude, des méridiens correspondans aux extrémités
» de l'arc mesuré; et si la valeur de l'angle ϖ est telle qu'on ne
» puisse pas l'attribuer aux erreurs des observations, on sera
» sûr que la terre n'est pas un sphéroïde de révolution ».

Considérations relatives à la perpendiculaire à la méridienne; différence en latitude des deux extrémités de l'arc.

97. « Considérons maintenant, le cas où le côté de la ligne
FIG. 32. » géodésique est perpendiculaire au plan correspondant du méri-

» dien céleste. Si l'on prend ce plan pour celui des xz; le cosi-
» nus de l'angle formé par ce côté sur ce plan sera $\frac{\sqrt{dx^2+dz^2}}{ds}$ » : pour le démontrer, soit mm' le premier côté de la ligne géodésique perpendiculaire au plan du méridien PE; le second côté $m'm''=ds$ formera sur ce plan, l'angle dont il vient d'être parlé; car si on abaisse sur le plan $P'E'$ parallèle à PE, une perpendiculaire $m''p$ qui sera parconséquent une horizontale, l'angle $pm'm''$ sera évidemment celui que ds fera avec $P'E'$ ou PE. Cela posé, si par le point m' on mène la petite horizontale dx, et par le point p la verticale dz, on aura, par la propriété du triangle rectangle, $pm'=\sqrt{dx^2+dz^2}$, et le triangle rectangle $m'pm''$ donnera, en désignant le rayon des tables par 1,

$$ds : 1 :: pm'=\sqrt{dx^2+dz^2} : \cos pm'm''=\frac{\sqrt{dx^2+dz^2}}{ds};$$

mais ce cosinus est nul à l'origine m, puisque mm' est perpendiculaire au plan PE; donc $dx=0$, $dz=0$, et l'on voit en outre que $dy=ds$, ou que $\frac{dy}{ds}=1$.

Il suit de là et des équations (A), que

$$d.r\sin\theta\cos\varphi=0, \qquad d.r\cos\theta=0.$$

Or différentiant ces équations en faisant tout varier, et éliminant dr entre les deux résultats, on obtiendra

$$rd\theta=r\sin\theta\cos\theta\tang\varphi d\varphi;$$

mais l'équation (5) ci-dessus donne à très-peu-près, $ds=rd\varphi\sin\theta$; donc si l'on divise la précédente par celle-ci, on aura

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{\tang\varphi\cos\theta}{r}.$$

« La constante c'' de l'équation (q), est égale à la valeur de
» $xdz-zdx$ à l'origine; mais nous venons de voir qu'à ce point,
» $dx=0$, $dz=0$; donc cette constante est nulle, et l'équation (q)
» donne à l'origine,

$$\frac{d^3}{ds}=\frac{c'}{r^2}\sin\varphi;$$

égalant cette valeur à la précédente, on obtient, à cause de tangφ=sinφ, du moins à très-peu-près,

$$c'=r_1\cos\theta_1=r_1\sin\psi_1,$$

« les quantités r_1 et θ_1 étant relatives à l'origine. Partant, si l'on » considère qu'à cette origine, l'angle φ est ce que nous avons nommé » précédemment φ_1-V_1, et dont nous avons trouvé la valeur égale » à $\frac{\alpha\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)}{\cos^2\psi_1}$, on aura à ce point

$$\frac{d\theta_1}{ds}=\alpha\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)\frac{\sin\psi_1}{\cos^2\psi_1},$$

en faisant toutefois $r_1=1$.

Voyons, d'après ces considérations, ce que devient l'équation (q); d'abord, puisque $c''=0$ et que φ est de l'ordre α, on a $\sin\varphi=\varphi$, $\cos\varphi=1$, et alors l'équation (q) se réduira, en rejetant les quantités de l'ordre α^2, à

$$r^2d\theta=c'ds.\varphi-\alpha ds\int ds\left(\frac{du'}{d\psi}\right).$$

Différentiant par rapport φ, divisant tout par ds et remettant pour c' sa valeur précédente, on aura

$$\frac{dd\theta_1}{ds^2}=\frac{\cos\theta_1}{r_1}\frac{d\varphi_1}{ds}-\alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right);\qquad (H)$$

mais l'équation (5) donnant assez exactement $ds=r_1d\varphi_1\sin\theta_1$, on a à l'origine

$$\frac{d\varphi_1}{ds}=\frac{1}{r_1\sin\theta_1}.$$

D'un autre côté, de l'équation de la surface du sphéroïde on tire

$$1+\alpha u'_1=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}=r_1;$$

et comme en outre

$$\theta = 100^\circ - \psi - \left(\frac{dr}{d\psi}\right), \text{ et que } dr = \alpha du',$$

on a

$$\theta_1 = 100^\circ - \psi_1 - \alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right);$$

partant, l'équat. (H) deviendra, à cause de $\cos\theta_1 = \sin\left\{\psi_1 + \alpha\left(\frac{du'}{d\psi}\right)\right\}$ et de $\sin\theta_1 = \cos\left\{\psi_1 + \alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right)\right\}$, et en éliminant r_1 et $\frac{d\varphi_1}{ds}$,

$$\frac{dd\theta_1}{ds^2} = \frac{\sin\left\{\psi_1 + \alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right)\right\}}{(1+\alpha u'_1)} \cdot \frac{1}{(1+\alpha u'_1)\cos\left\{\psi_1 + \alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right)\right\}} - \alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right)$$

$$= \operatorname{tang}\left\{\psi_1 + \alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right)\right\}(1+\alpha u'_1)^{-2} - \alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{tang}\psi_1 + \alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right)}{1 - \operatorname{tang}\psi_1 \alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right)}\{1 - 2\alpha u'_1\} - \alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right)$$

$$= \left\{\operatorname{tang}\psi_1 + \alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right)\right\}(1-2\alpha u'_1)\left\{1 - \operatorname{tang}\psi_1 \alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right)\right\}^{-1} - \alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right).$$

Enfin développant et rejetant les termes en α^2, on aura après la réduction,

$$\frac{dd\theta_1}{ds^2} = (1 - 2\alpha u'_1)\operatorname{tang}\psi_1 + \alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right)\operatorname{tang}^2\psi_1. \qquad (I)$$

L'équation $\frac{d\varphi_1}{ds} = \frac{1}{r_1 \sin\theta_1}$ devient, par les mêmes substitutions, et par un procédé analogue,

$$\frac{d\varphi_1}{ds} = \frac{1}{(1+\alpha u'_1)\cos\left(\psi_1 + \alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right)\right)} = \frac{1 - \alpha u'_1}{\cos\psi_1\left(1 - \alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right)\operatorname{tang}\psi_1\right)}$$

$$= \frac{1}{\cos\psi_1}\left\{1 - \alpha u'_1 + \alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right)\operatorname{tang}\psi_1\right\}. \qquad (K)$$

D'un autre côté, l'équation (p) donne à l'origine

$$\frac{d\varphi_1}{ds} = \frac{c}{r_1^2 \sin^2\theta_1},$$

et la précédente

$$\frac{d\psi_1}{ds}=\frac{1}{r_1\cos\psi_1};$$

donc

$$\frac{c}{r_1'^2\sin^2\theta_1}=\frac{1}{r_1\cos\psi_1};$$

et comme aussi, à très-peu-près, $\sin\theta_1=\cos\psi_1$, on aura

$$c=r'\sin\theta_1.$$

De là, l'équation (p) devient

$$c^2 d\varphi=ds.\alpha\int ds\left(\frac{du'}{d\varphi}\right);$$

différentiant en regardant ds comme constant, et éliminant du résultat, $\frac{d\varphi}{ds}=\frac{1}{r\sin\theta}$, $dr=\alpha du'$, etc..... on aura

$$\frac{dd\varphi}{ds^2}=-\frac{2\alpha\frac{du_1'}{ds}}{r_1'^2\sin\theta_1}-2\frac{\cos\theta_1\frac{d\theta_1}{ds}}{r_1\sin^2\theta_1}+\frac{\alpha\left(\frac{du_1'}{d\varphi}\right)}{\cos^2\psi_1}.$$

L'équation $\theta=100^\circ-\psi-\alpha\left(\frac{du'}{d\psi}\right)$ donne $\psi=100^\circ-\theta-\alpha\left(\frac{du'}{d\psi}\right)$; si donc on développe ψ suivant les puissances ascendantes de s, c'est-à-dire de l'accroissement de l'arc perpendiculaire au méridien, on aura par le théorême de Taylor,

$$\psi=\psi_1+\frac{d\psi_1}{ds}s+\frac{d^2\psi_1'}{1.2.ds^2}s^2+\ldots..=\psi_1-\frac{d\theta_1}{ds}s-\alpha\left(\frac{ddu_1'}{d\psi ds}\right)s-\tfrac{1}{2}\frac{dd\theta_1}{ds^2}s^2;$$

en ne conservant parmi les termes de l'ordre s^2, que ceux qui sont indépendans de α.

D'ailleurs, à cause de $ds=r_1\sin\theta_1 d\varphi$, de $\sin\theta_1=\cos\psi_1$ et de $r_1=1$ à-peu-près, on aura

$$\frac{1}{ds}=\frac{1}{d\varphi\cos\psi_1};$$

et partant,

$$\psi-\psi_1=-s\frac{d\theta_1}{ds}-\tfrac{1}{2}s^2\frac{dd\theta_1}{ds^2}-\frac{\alpha s}{\cos\psi_1}\cdot\left(\frac{ddu_1'}{d\psi_1 d\varphi}\right).$$

Mais

Mais nous avons vu que $\frac{d\theta_1}{ds}=\alpha\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)\frac{\tang\psi_1}{\cos\psi_1}$, et en vertu de l'équation on a, pour la valeur approchée de $\frac{dd'_1}{ds^2}$, $\frac{dd'_1}{ds^2}=\tang\psi_1$.

Donc l'équation ci-dessus deviendra

$$\psi-\psi_1=-\frac{\alpha s}{\cos\psi_1}\left\{\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)\tang\psi_1+\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi d\psi}\right)\right\}-\tfrac{1}{2}s^2\tang\psi_1.$$

« La différence des latitudes aux deux extrémités de l'arc me» suré fera donc connaître la fonction

$$-\frac{\alpha s}{\cos\psi_1}\left\{\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right).\tang\psi_1+\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi d\psi}\right)\right\};$$

» il est remarquable que pour le même arc mesuré dans le sens
» du méridien, cette fonction est, par ce qui précède, égale
» à $\frac{\varpi}{\tang\psi_1}$; elle pourra être ainsi déterminée de ces deux manières,
» et l'on pourra juger si ces valeurs trouvées, soit de la différence
» des latitudes, soit de l'angle azimuthal ϖ, sont dues aux er-
» reurs des observations, ou à l'excentricité des parallèles ter-
» restres ».

Expression de la différence en longitude, des deux extrémités de l'arc terrestre perpendiculaire au méridien.

98. φ étant évidemment fonction de l'arc mesuré dans le sens du méridien, et φ étant ce que devient φ_1, lorsque cet arc reçoit un accroissement s, on aura comme ci-dessus, et en ne conservant que la première puissance de s,

$$\varphi-\varphi_1=\frac{sd\varphi_1}{ds}=\frac{s}{r_1\sin\theta_1}=\frac{s}{\cos\psi_1}\left\{1-\alpha u'_1+\alpha\left(\frac{du'}{d\psi}\right)\tang\psi_1\right\},$$

« $\varphi-\varphi_1$ n'est pas la différence en longitude des deux extrémi-
» tés de l'arc s; cette différence est égale à $V-V_1$; or on a
» par ce qui précède, page 201,

$$\varphi-V=\frac{\alpha\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)}{\cos^2\psi}\quad\text{et}\quad\varphi_1-V_1=\frac{\alpha\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)}{\cos^2\psi_1};$$

donc, à cause que $\psi = \psi_1$ à peu de chose près,

$$(\varphi - V) - (\varphi_1 - V_1) = \frac{\alpha\left\{\left(\frac{du'}{d\varphi}\right) - \left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)\right\}}{\cos^2\psi_1};$$

mais $\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)$ étant ce que devient $\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)$, lorsque l'arc en question reçoit un accroissement s, on a par le théorême de Taylor,

$$\left(\frac{du'}{d\varphi}\right) - \left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right) = s\left(\frac{d^2u'_1}{d\varphi ds}\right) + \ldots\ldots\ldots$$

partant

$$\varphi - V - (\varphi - V_1) = \frac{\alpha . s\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi ds}\right)}{\cos^2\psi_1}.$$

D'un autre côté, puisque $s\frac{d\varphi_1}{ds} = \frac{s}{\cos\psi_1}$, on a $\frac{s}{ds} = \frac{s}{d\varphi_1 \cos\psi_1}$, et parconséquent

$$\varphi - V - (\varphi_1 - V_1) = \frac{\alpha\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi^2}\right)}{\cos^3\psi_1},$$

et enfin

$$\left.\begin{aligned} V - V_1 &= (\varphi - \varphi_1) - \frac{\alpha\left(\frac{d^2u'_1}{d\varphi^2}\right).s}{\cos^3\psi_1} - \\ &= \frac{s}{\cos\psi_1}\left\{1 - \alpha u'_1 + \alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right)\tang\psi_1 - \frac{\alpha\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi^2}\right)}{\cos^2\psi_1}\right\}\end{aligned}\right\}. \quad (L)$$

« Pour plus d'exactitude, il faut ajouter à cette valeur de $V - V_1$
» le terme dépendant de s^3 et indépendant de α, que l'on obtient
» dans l'hypothèse de la terre sphérique; ce terme est égal à
» $-\frac{1}{3}s^3\frac{\tang^2\psi_1}{\cos\psi_1}$ (art. 80); ainsi l'on a

$$V - V_1 = \frac{s}{\cos\psi_1}\left\{1 - \alpha u'_1 + \alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right).\tang\psi_1 - \frac{\alpha\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi^2}\right)}{\cos^2\psi_1} - \frac{1}{3}s^2\tang^2\psi_1\right\}.$$

Détermination de l'angle azimuthal à l'extrémité de l'arc perpendiculaire au méridien.

99. « Il nous reste à déterminer l'angle azimuthal à l'extrémité FIG. 33
» de l'arc s. Pour cela, nommons $x'y'z'$ les coordonnées du point
» m' rapporté au méridien APX' de la dernière extrémité »,
tandis que xyz sont les coordonnées de ce même point, rapportées au méridien APX. Le cosinus de l'angle azimuthal $pm'm$, d'après ce qu'il a été dit ci-dessus, est égal à $\frac{\sqrt{dx'^2+dz'^2}}{ds}$; et puisque xyz sont les coordonnées de la première extrémité de l'arc par rapport au plan APX, on aura d'une part, à cause que le premier côté de s est supposé perpendiculaire à ce dernier plan,

$$\frac{dx_{,}}{ds}=0;\quad \frac{dz_{,}}{ds}=0;\quad \frac{dy_{,}}{ds}=1:$$

de là, en ne conservant que la puissance de s,

$$\frac{dx}{ds}=s.\frac{ddx_{,}}{ds^2},\qquad \frac{dz}{ds}=s.\frac{ddz_{,}}{ds^2};$$

et de l'autre part on aura, en rapportant les coordonnées aux nouveaux axes,

$$x'=x.\cos(V-V_{,})+y.\sin(V-V_{,});\ y'=y\cos(V-V_{,})-x\sin(V-V_{,}):$$

Ainsi $V-V_{,}$ étant, par ce qui précède, de l'ordre α, la différentielle de la première des équations précédentes donnera

$$dx'=dx+dy\,(V-V_{,});$$

divisant tout par ds, et faisant attention que pour le point que l'on considère, y se change en $y_{,}$, on aura

$$\frac{dx'}{ds}=\frac{dx}{ds}+(V-V_{,})\frac{dy_{,}}{ds},$$

et parconséquent

$$\frac{dx'}{ds}=s.\frac{ddx_{,}}{ds^2}+(V-V_{,})\frac{dy_{,}}{ds}\ldots\ldots\ldots(M)$$

maintenant on a, $x = r\sin\theta.\cos\varphi$. Différentiant en faisant tout varier, et observant que φ est un très-petit angle, on trouve

$$dx = dr\sin\theta.\cos\varphi + r\cos\theta\cos\varphi d\theta - r\sin\theta\sin\varphi d\varphi$$
$$= dr\sin\theta \qquad + r\cos\theta d\theta \qquad + r\sin\theta.\varphi d\varphi.$$

Passant à la différentielle seconde, et regardant $d\varphi$ comme constant, on obtient, en négligeant les termes de l'ordre α^2,

$$ddx = ddr\sin\theta + r\cos\theta dd\theta - r\sin\theta d\varphi^2.$$

D'un autre côté, $r = 1 + \alpha u'$, donc $ddr = \alpha ddu'$; donc enfin, en divisant l'équation précédente par ds^2, on a pour la première extrémité de l'arc s,

$$\frac{ddx_1}{ds^2} = \alpha\frac{ddu'_1}{ds^2}\sin\theta_1 + r_1\cos\theta_1\frac{dd\theta_1}{ds^2} - r_1\sin\theta_1\frac{d\varphi_1^2}{ds^2};$$

ensuite, à cause de $u = f(\varphi, \theta)$, il est clair que

$$du = \left(\frac{du}{d\varphi}\right)d\varphi + \left(\frac{du}{d\theta}\right)d\theta.$$

Différentiant une seconde fois et rejetant les termes de l'ordre α^2, on aura, en prenant $d\varphi$ pour constant,

$$ddu = \left(\frac{ddu}{d\varphi^2}\right)d\varphi^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)dd\theta;$$

donc à l'origine de s on aura, en multipliant par $\frac{\alpha}{ds^2}$, et en se rappelant que $d\theta$ et $d\psi$ sont de signes contraires (art. 88),

$$\alpha\frac{ddu'_1}{ds^2} = \alpha\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi^2}\right).\frac{d\varphi_1^2}{ds^2} - \alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right)\frac{dd\theta_1}{ds^2};$$

mais, d'après ce que nous avons déjà vu,

$$\frac{d\varphi_1^2}{ds^2} = \frac{1}{r_1^2\sin^2\theta_1} = \frac{1}{\cos^2\psi_1} \quad \text{et} \quad \frac{dd\theta_1}{ds^2} = \text{tang}\,\psi_1;$$

partant

$$\alpha\frac{ddu'_1}{ds^2} = \alpha\frac{\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi^2}\right)}{\cos^2\psi_1} - \alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi_1}\right)\text{tang}\,\psi_1;$$

De plus, $ds = r_1\sin\theta_1 d\varphi_1$; on aura donc, en substituant pour

$r_{,}, \theta_{,}, \frac{dy_{,}}{ds}$ et $\frac{d^2y_{,}}{ds^2}$ leurs valeurs précédentes,

$$\frac{ddx_{,}}{ds^2} = \left\{ \frac{\alpha\left(\frac{ddu'_{,}}{d\psi^2}\right)}{\cos^2\psi_{,}} - \alpha\left(\frac{du'_{,}}{d\psi}\right)\text{tang}\,\psi_{,} \right\} \cos\left\{\psi_{,} + \alpha\left(\frac{du'_{,}}{d\psi}\right)\right\}$$
$$+ (1+\alpha u'_{,})\left\{(1-2\alpha u'_{,})\,\text{tang}\,\psi_{,} + \alpha\left(\frac{du'_{,}}{d\psi}\right)\text{tang}^2\psi_{,}\right\}\sin\left\{\psi_{,} + \alpha\left(\frac{du'_{,}}{d\psi}\right)\right\}$$
$$-(1+\alpha u'_{,})\cos\left\{\psi_{,} + \alpha\left(\frac{du'_{,}}{d\psi}\right)\right\} \cdot \frac{1}{\cos^2\psi_{,}}\left\{1 - \alpha u'_{,} + \alpha\left(\frac{du'_{,}}{d\psi}\right)\text{tang}\,\psi_{,}\right\}^2;$$

négligeant dans le développement les termes de l'ordre α^2 et réduisant, on trouve avec un peu d'attention

$$\frac{ddx'}{ds^2} = (1 - \alpha u'_{,})\frac{\sin^2\psi_{,}}{\cos\psi_{,}} + \alpha\left(\frac{du'_{,}}{d\psi}\right)\text{tang}^2\psi_{,}\sin\psi_{,}$$
$$- \frac{1}{\cos\psi_{,}}\left\{1 - \alpha u'_{,} + \alpha\left(\frac{du'_{,}}{d\psi}\right)\text{tang}\,\psi_{,}\right\}.$$

On a aussi

$$z = r\cos\theta;$$

parconséquent, pour la différentielle seconde,

$$d^2z = d^2r\cos\theta - dr\sin\theta.d\theta - dr\sin\theta.d\theta - r\cos\theta d\theta^2 - r\sin\theta d^2\theta,$$

ou simplement, en supprimant les termes en α^2,

$$d^2z = d^2r\cos\theta - r\sin\theta\, d^2\theta;$$

mais $ddr = \alpha ddu'$, donc

$$\frac{d^2z_{,}}{ds^2} = \alpha.\frac{ddu'_{,}}{ds^2}\cos\theta - r_{,}\sin\theta.\frac{dd\theta_{,}}{ds^2}.$$

Faisant ici les substitutions indiquées précédemment et procédant de la même manière, on aura

$$\frac{ddz_{,}}{ds^2} = -(1-\alpha u'_{,})\sin\psi_{,} - \alpha\left(\frac{du'_{,}}{d\psi}\right)\text{tang}^2\psi_{,}\cos\psi_{,} + \alpha\left(\frac{ddu'_{,}}{d\varphi^2}\right)\frac{\sin\psi_{,}}{\cos^2\psi_{,}}.$$

Maintenant, si l'on fait attention que $\frac{dy_{,}}{ds} = 1$, et que $V - V_{,}$ est donné par l'équation (L), celle (M) deviendra, en substituant aussi pour $\frac{ddx'}{ds^2}$ sa valeur précédente,

$$\frac{dx'}{ds}=s(1-\alpha u'_1)\frac{\sin^2\psi_1}{\cos\psi_1}+\alpha s\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right)\operatorname{tang}^2\psi_1\sin\psi_1-\alpha s\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi^2}\right)\frac{\sin^2\psi_1}{\cos^3\psi_1};$$

on trouvera de même, à cause de $\frac{dz}{ds}=s.\frac{ddz_1}{ds^2}$,

$$\frac{dz}{ds}=-s(1-\alpha u'_1).\sin\psi_1-\alpha s\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right)\operatorname{tang}^2\psi_1\cos\psi_1+\alpha s\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi^2}\right)\frac{\sin\psi_1}{\cos^2\psi_1}.$$

Il suit de là que le cosinus de l'angle azimuthal à l'extrémité de l'arc sera

$$\frac{\sqrt{dx'^2+dz^2}}{ds}=s\operatorname{tang}\psi_1\left\{1-\alpha u'_1+\alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right)\operatorname{tang}\psi_1-\frac{\alpha\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi^2}\right)}{\cos^2\psi_1}\right\}.$$

« Ce cosinus étant fort petit, il peut être pris pour le com- » plément de l'angle azimuthal, qui, parconséquent, est égal à

$$100^{gr}-s.\operatorname{tang}\psi_1\left\{1-\alpha u'_1+\alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right).\operatorname{tang}\psi_1-\frac{\alpha\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi^2}\right)}{\cos^2\psi_1}\right\}:$$

» Il faut, pour plus d'exactitude, ajouter à cet angle la par- » tie dépendante de s^3 et indépendante de α, que l'on obtient dans » l'hypothèse de la terre sphérique, cette partie est égale à » $\frac{1}{3}s^3(\frac{1}{2}+\operatorname{tang}^2\psi_1).\operatorname{tang}\psi_1$ (art. 80)». Ainsi l'angle azimuthal à l'extrémité de l'arc s est égal à

$$100^{gr}-s\operatorname{tang}\psi_1\left\{1-\alpha u'_1+\alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right).\operatorname{tang}\psi_1-\frac{\alpha\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi^2}\right)}{\cos^2\psi_1}-\frac{1}{3}s^2(\tfrac{1}{2}+\operatorname{tang}^2\psi_1)\right\}.$$

Recherche de l'expression du rayon osculateur d'une ligne géodésique quelconque.

100. « Le rayon osculateur de la ligne géodésique formant un » angle quelconque avec le plan du méridien, est égal à

$$R=\frac{ds^2}{\sqrt{(ddx)^2+(ddy)^2+(ddz)^2}};$$

» ds étant constant (Théorie des courbes à double courbure; » par Lacroix, Calc. diff., tome I). L'équation du sphéroïde

» $x^2+y^2+z^2=1+2\alpha u'$, donne

$$x.ddx+yddy+zddz=-ds^2+\alpha ddu';$$

» si l'on ajoute le quarré de cette équation, aux quarrés des équa-
» tions (O), on aura, en négligeant comme à l'ordinaire les termes
» de l'ordre α^2,

$$(x^2+y^2+z^2).\{(ddx)^2+(ddy)^2+(ddz)^2\}=ds^4-2\alpha ds^2.ddu':$$

or à cause de $x^2+y^2+z^2=1+2\alpha u'$, l'équation précédente peut être mise sous la forme

$$\frac{1+2\alpha u'}{1-2\alpha\frac{ddu'}{ds^2}}=\frac{s^4}{(ddx)^2+(ddy)^2+(ddz)^2}=R^2;$$

tirant la racine quarrée, on aura

$$(1+2\alpha u')^{\frac{1}{2}}\left(1-2\alpha\frac{ddu'}{ds^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=R,$$

et enfin

$$R=1+\alpha u'+\alpha\frac{ddu'}{ds^2}.$$

Dans le sens du méridien on a, comme on l'a déjà observé, $ds=d\psi$, ainsi

$$\alpha.\frac{ddu'}{ds^2}=\alpha.\left(\frac{ddu'}{d\psi^2}\right);$$

et partant

$$R=1+\alpha u'+\alpha\left(\frac{ddu'}{d\psi^2}\right).$$

Dans le sens perpendiculaire au méridien, on a par ce qui précède,

$$\alpha\frac{ddu'_1}{ds^2}=\frac{\alpha.\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi^2}\right)}{\cos^2\psi_1}-\alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right)\text{tang}\,\psi_1;$$

partant

$$R=1+\alpha u'_1-\alpha\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right)\text{tang}\,\psi_1+\frac{\alpha\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi^2}\right)}{\cos^2\psi_1}.$$

« Si dans l'expression précédente de $V-V_1$ on fait $\frac{S}{R}=S'$, elle

» prend cette forme très-simple, relative à une sphère du rayon R,
» en faisant d'ailleurs $\alpha=0$,

$$V-V_{,}=\frac{s'}{\cos\psi_{,}}\{1-\tfrac{1}{3}s'^{2}\,\text{tang}^{2}.\psi_{,}\}.$$

L'expression de l'angle azimuthal devient, (art. 80),

$$100^{gr}-s'\,\text{tang}\,\psi_{,}\{1-\tfrac{1}{3}s'^{2}(\tfrac{1}{2}+\text{tang}^{2}.\psi_{,})\};$$

maintenant si l'on se rappelle que $u'=f(\varphi,\psi)$, on aura

$$du'=\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)d\varphi+\left(\frac{du'}{d\psi}\right)d\psi:$$

passant à la différentielle seconde, en faisant tout varier, il viendra

$$ddu'=d.\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)d\varphi+\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)dd\varphi+d.\left(\frac{du'}{d\psi}\right)d\psi+\left(\frac{du'}{d\psi}\right)dd\psi$$
$$=\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)dd\varphi+\left(\frac{du'}{d\psi}\right)dd\psi+\left(\frac{ddu'}{d\varphi^{2}}\right)d\varphi^{2}+\left(\frac{ddu'}{d\psi^{2}}\right)d\psi^{2}+2\left(\frac{ddu'}{d\varphi d\psi}\right)d\varphi d\psi,$$

et divisant tout par ds^{2}, on aura

$$\frac{ddu'}{ds^{2}}=\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)\frac{dd\varphi}{ds^{2}}+\left(\frac{du'}{d\psi}\right)\frac{dd\psi}{ds^{2}}+\left(\frac{ddu'}{d\varphi^{2}}\right)\frac{d\varphi^{2}}{ds^{2}}+2\left(\frac{ddu'}{d\varphi d\psi}\right)\frac{d\varphi}{ds}\cdot\frac{d\psi}{ds}+\left(\frac{ddu'}{d\psi^{2}}\right)\cdot\frac{d\psi^{2}}{ds^{2}}.$$

« Nommons λ l'angle que le premier côté de la ligne géodé-
» sique forme avec le plan correspondant du méridien céleste,
» on aura, dans l'hypothèse de la terre sphérique,

$$\frac{d\varphi_{,}}{ds}=\frac{\sin\lambda}{\cos\psi_{,}};\quad \frac{dd\varphi_{,}}{ds^{2}}=\frac{2\sin.\cos\lambda}{\cos\psi_{,}}.\text{tang}\,\psi_{,},$$
$$\frac{d\psi_{,}}{ds}=\cos\lambda;\quad \frac{dd\psi_{,}}{ds^{2}}=-\sin^{2}\lambda.\text{tang}\,\psi_{,}.$$

FIG. 34 Pour démontrer ces équations, on remarquera d'abord que le triangle sphérique PMN donne $ds : d\varphi :: \sin\lambda : \sin(100^{\circ}-\psi_{,})$ et parconséquent $\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\sin\lambda}{\cos\psi_{,}}\ldots(1)$.

Le petit triangle NRM, que l'on peut considérer comme rectiligne rectangle, donne à son tour

$$1 : ds :: \cos\lambda : d\psi, \text{ d'où } \frac{d\psi}{ds} = \cos\lambda. \qquad (2)$$

Cela posé, si l'on différentie l'équation (1), on aura

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{\cos\lambda\cos\psi_1 d\lambda + \sin\lambda\sin\psi_1 d\psi}{\cos^2\psi_1 ds}.$$

D'un autre côté, comme les analogies différentielles (page 312, n° 545 de la Trigonométrie de Cagnoli) donnent

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\sin\lambda}{\cot\psi_1} = \sin\lambda \,\text{tang}\,\psi_1; \qquad (3)$$

on aura, à cause de l'équation (2)

$$\frac{d^2\varphi_1}{ds^2} = \frac{\cos\lambda\sin\lambda\,\text{tang}\,\psi_1\cos\psi_1 + \cos\lambda\sin\lambda\sin\psi_1}{\cos^2\psi_1} = \frac{2\sin\lambda\cos\lambda}{\cos\psi_1}.\text{tang}\,\psi_1.$$

Différentiant aussi l'équation (2) il viendra

$$\frac{d^2\psi_1}{ds^2} = -\sin\lambda\frac{d\lambda}{ds};$$

et à cause de l'équation (3) on aura

$$\frac{d^2\psi_1}{ds^2} = -\sin^2\lambda.\text{tang}\,\psi_1:$$

de là, la valeur précédente de $\frac{ddu'}{ds^2}$ devient

$$\frac{ddu'_1}{ds^2} = 2.\frac{\sin\lambda.\cos\lambda}{\cos\psi_1}\left\{\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right).\text{tang}\,\psi_1 + \left(\frac{dud'_1}{d\varphi d\psi}\right)\right\} - \sin^2\lambda.\text{tang}\,\psi_1\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right)$$
$$+ \left(\frac{ddu'_1}{d\psi^2}\right).\frac{\sin^2\lambda}{\cos^2\psi_1} + \left(\frac{ddu'_1}{d\psi^2}\right).\cos^2\lambda;$$

« le rayon osculateur R dans le sens de cette ligne géodésique,
» est donc

$$R = 1 + \alpha u'_1 + \alpha\frac{ddu'_1}{ds^2} = 1 + \alpha u'_1 + 2\alpha\frac{\sin\lambda.\cos\lambda}{\cos\psi_1}\left\{\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right).\text{tang}\,\psi_1 + \left(\frac{ddu'_1}{d\varphi.d\psi}\right)\right\}$$
$$- \alpha\sin^2\lambda.\text{tang}\,\psi_1\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right) + \alpha\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi^2}\right).\frac{\sin^2.\lambda}{\cos^2\psi_1} + \alpha\left(\frac{ddu'_1}{d\psi^2}\right).\cos^2.\lambda.$$

» Soit pour abréger

Ee

$$K = 1 + \alpha u'_1 - \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{tang}\psi_1 \left(\frac{du'_1}{d\psi}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{\alpha.\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi^2}\right)}{\cos^2\psi_1} + \tfrac{1}{2}\alpha\left(\frac{ddu'_1}{d\psi^2}\right);$$

$$A = \frac{\alpha}{\cos\psi_1}\left\{\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right).\operatorname{tang}\psi_1 + \left(\frac{ddu'_1}{d\varphi\, d\psi}\right)\right\};$$

$$B = \frac{\alpha}{2}.\operatorname{tang}\psi_1\left(\frac{du'_1}{d\psi}\right) - \frac{\alpha}{2}\,\frac{\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi^2}\right)}{\cos^2\psi_1} + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{ddu'_1}{d\psi^2}\right);$$

» on aura

$$R = K + A.\sin 2\lambda + B.\cos 2\lambda.$$

» Les observations des angles azimuthaux, et de la différence » des latitudes aux extrémités de deux lignes géodésiques mesu- » rées, l'une, dans le sens du méridien, l'autre, dans le sens per- » pendiculaire au méridien, feront connaître, par ce qui pré- » cède, les valeurs de A, B et K; car les observations donnent » les rayons osculateurs dans ces deux sens. Soient R' et R'' ces » rayons; on aura

$$K = \frac{R' + R''}{2}, \qquad B = \frac{R' - R''}{2},$$

» et la valeur de A sera déterminée, soit par l'azimuth de l'ex- » trémité de l'arc mesuré dans le sens du méridien, soit par la » différence en latitude, des deux extrémités de l'arc mesuré dans » le sens perpendiculaire au méridien. On aura ainsi le rayon » osculateur de la ligne géodésique, dont le premier côté forme un » angle quelconque avec le plan du méridien ».

Si l'on nomme $2E$ un angle dont la tangente $= \frac{A}{B}$, on aura

$$R = K + A\sin 2\lambda + B.\cos 2\lambda = K + B(\operatorname{tang} 2E \sin 2\lambda + \cos 2\lambda);$$

mais $\operatorname{tang} 2E = \frac{\sin 2E}{\cos 2E}$, donc

$$R = K + \frac{B}{\cos 2E}(\sin 2E \sin 2\lambda + \cos 2E \cos 2\lambda)$$
$$= K + \frac{B}{\cos 2E}\cos(2\lambda - 2E).$$

D'un autre côté, puisque $\tang 2E = \frac{A}{B}$ par hypothèse, on a $\frac{\sin 2E}{\cos 2E} = \frac{A}{B}$, et $\frac{1-\cos^2 2E}{\cos^2 2E} = \frac{A^2}{B^2}$, d'où $\frac{1}{\cos^2 2E} = \frac{A^2+B^2}{B^2}$, et ensuite $\cos 2E = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$; ainsi donc

$$R = K + \cos(2\lambda - 2E)\sqrt{A^2+B^2} \ldots\ldots\ldots (m)$$

Le plus grand rayon osculateur r' répond à $\lambda = E$, puisque l'on a

$$r' = K + \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Le plus petit rayon osculateur r répond à $\lambda = 100° + E$, puisque l'on a

$$r = K - \sqrt{A^2 + b^2};$$

parconséquent

$$\frac{r'-r}{2} = \sqrt{A^2+B^2}, \quad \frac{r'+r}{2} = K.$$

Ces valeurs étant introduites dans l'équation (m) précédente, on aura

$$R = \frac{r+r'}{2} + \frac{r'-r}{2}\cos 2(\lambda - E);$$

et puisque $\cos 2(\lambda-E) = \cos^2(\lambda-E) - \sin^2(\lambda-E) = 2\cos^2(\lambda-E) - 1$; il s'ensuit que

$$R = r + (r'-r)\cos^2.(\lambda - E);$$

$\lambda - E$ étant l'angle que la ligne géodésique, correspondante à R, forme avec celle qui correspond à r'.

Détermination du rayon de l'ellipsoïde osculateur.

101. « Nous avons déjà observé qu'à chaque point de la sur-
» face de la terre, on peut concevoir un ellipsoïde osculateur
» sur lequel les degrés, dans tous les sens, sont sensiblement
» les mêmes dans une petite étendue autour du point d'oscula-
» tion. Exprimons le rayon de cet ellipsoïde par la fonction

$$1-\alpha\sin^2\psi.\{1+h.\cos 2(\varphi+\mathfrak{C})\},$$

» les longitudes φ étant comptées d'un méridien donné », et soit

$$-\sin^2\psi\{1+h\cos 2(\varphi+\mathfrak{C})\}=u'=-(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2\psi)\{1+h\cos 2(\varphi+\mathfrak{C})\},$$

on aura

$$\left(\frac{du'}{d\psi}\right)=-2\sin\psi\cos\psi\{1+h\cos 2(\varphi+\mathfrak{C})\}=-\sin 2\psi\{1+h\cos 2(\varphi+\mathfrak{C})\},$$

$$\left(\frac{ddu'}{d\psi^2}\right)=-2\cos 2\psi\{1+h\cos 2(\varphi+\mathfrak{C})\},$$

$$\left(\frac{dddu'}{d\psi^3}\right)=4\sin 2\psi\{1+h\cos 2(\varphi+\mathfrak{C})\};$$

et parconséquent

$$u'+\left(\frac{d^2u'}{d\psi^2}\right)=-\tfrac{1}{2}(1+3\cos 2\psi)\{1+h\cos 2(\varphi+\mathfrak{C})\},$$

$$\left(\frac{du'}{d\psi}\right)+\left(\frac{d^3u'}{d\psi^3}\right)=3\sin 2\psi\{1+h\cos 2(\varphi+\mathfrak{C})\}:$$

donc l'expression de l'arc mesuré dans le sens du méridien, sera (art. 88),

$$\varepsilon-\frac{\alpha\varepsilon}{2}\{1+h\cos 2(\varphi+\mathfrak{C})\}.\{1+3\cos 2\psi-3\varepsilon.\sin 2\psi\}.$$

« Si l'arc mesuré est considérable, et si l'on a observé, » comme en France, la latitude de quelques points intermédiaires » entre les extrêmes, on aura par ces mesures, et la grandeur » du rayon pris pour unité, et la valeur de $\alpha.\{1+h\cos 2(\varphi+\mathfrak{C})\}$ ». On a, de plus, en différentiant la valeur de u', d'abord par rapport à φ, ensuite par rapport à ψ,

$$\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)=2\sin^2\psi.h\sin 2(\varphi+\mathfrak{C})\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (n)$$

$$\left(\frac{ddu'}{d\psi d\psi}\right)=4\sin\psi\cos\psi h\sin 2(\varphi+\mathfrak{C})=2\sin 2\psi.h\sin 2(\varphi+\mathfrak{C}):$$

ainsi la dernière valeur de ϖ (art. 89) deviendra

$$\varpi = -2\alpha\epsilon h \,\text{tang}^2.\psi \frac{(\sin^2\psi + 2\cos^2\psi)}{\cos\psi} \sin 2(\varphi + \zeta)$$
$$= 2\alpha\epsilon h.\frac{\text{tang}^2.\psi}{\cos\psi}(1 + \cos^2.\psi).\sin 2(\varphi + \zeta).$$

L'observation des angles azimuthaux aux deux extrémités de l'arc, fera donc connaître $\alpha h.\sin 2(\varphi + \zeta)$; et si l'on différentie l'équation (n), on aura

$$\left(\frac{ddu'}{d\varphi^2}\right) = 4h \sin^2.\psi \cos 2(\varphi + \zeta),$$

et parconséquent

$$\frac{\alpha\left(\frac{ddu'}{d\varphi^2}\right)}{\cos^2\psi} = 4\alpha h \,\text{tang}^2\psi \cos 2(\varphi + \zeta);$$

or puisque le rayon osculateur, dans le sens de la perpendiculaire à la méridienne, est

$$R = 1 + \alpha u' - \alpha\left(\frac{du'}{d\psi}\right)\text{tang}\,\psi + \frac{\alpha\left(\frac{ddu'}{d\varphi^2}\right)}{\cos^2\psi},$$

on aura, en éliminant les coefficiens différentiels, et pour le degré dans le sens perpendiculaire au méridien,

$$R = 1^\circ + 1^\circ.\alpha\sin^2\psi\{1 + h\cos 2(\varphi + \zeta)\} + 4^\circ.\alpha h \,\text{tang}^2.\psi \cos 2(\varphi + \zeta).$$

« La mesure de ce degré donnera donc la valeur de $\alpha h\cos 2(\varphi + \zeta)$;
» ainsi l'ellipsoïde osculateur sera déterminé par ces diverses me-
» sures : il serait nécessaire, pour un aussi grand arc, d'avoir
» égard au quarré de ϵ dans l'expression de l'angle ϖ, surtout
» si, comme on l'a observé en France, l'angle azimuthal ne va-
» rie pas proportionnellement à l'arc mesuré ; il faudrait même
» alors ajouter à l'expression précédente du rayon de l'ellip-
» soïde, un terme de la forme $\alpha k\sin\psi.\cos\psi.\sin(\varphi + \zeta')$, pour avoir
» l'expression la plus générale de ce rayon ».

102. Maintenant pour déterminer l'ellipsoïde osculateur en partant des mesures de la terre, il conviendrait de comparer à la figure elliptique les degrés mesurés du méridien, et nous

verrions que cette comparaison donne, pour la figure de ces méridiens terrestres, des ellipses différentes qui s'éloignent trop des observations pour pouvoir être admises; d'où l'on doit conclure que la terre n'a point la forme régulière que l'on serait d'abord tenté de lui attribuer. Cependant avant de renoncer entièrement à la figure elliptique, il importe de déterminer celle dans laquelle le plus grand écart des degrés mesurés, est plus petit que dans toute autre figure de même espèce. L'auteur donne, pour atteindre ce but deux méthodes qu'il expose avec trop de clarté pour qu'il soit nécessaire, dans cette circonstance, d'entrer dans aucun détail (*). C'est dans l'ouvrage même de ce grand géomètre que l'on prendra une entière connaissance de la théorie actuelle qu'il a envisagé sous le point de vue le plus général, et discuté avec la plus profonde sagacité.

(*) On peut aussi employer à cet effet la méthode de Legendre, exposée à l'art. 76.

CHAPITRE XV.

De la réfraction terrestre, moyen de la déterminer sur la terre réputée sphérique.

103. L'AIR étant toujours soumis à l'action de la lumière du soleil, et tenant en dissolution des substances de différente nature, ne peut avoir une densité constante. Un rayon de lumière qui traverse obliquement l'atmosphère, et qui se trouve d'ailleurs attiré progressivement par les couches inférieures, est donc forcé de se détourner à chaque instant de la route qu'il suivait dans l'instant précédent, en s'infléchissant continuellement vers le globe terrestre : c'est cet effet que l'on nomme *réfraction*.

Si du point *A* on observe un objet terrestre *B*, le rayon lumineux qui nous en transmet l'image suivra la courbe *BDA*, et l'objet *B* sera vu dans la direction de la tangente à cette courbe, c'est-à-dire en *B'*; d'où il suit que la réfraction fait en général paraître les objets plus élevés qu'ils ne le sont. L'angle *B'AB* mesure donc l'effet de la réfraction (*). La détermination de cet FIG. 35

(*) Nous supposons ici que la courbe de réfraction est à simple courbure, et que son plan est vertical ; mais quelques observateurs et Delambre principalement ont reconnu, dans certain état de l'atmosphère, l'existence d'une réfraction horizontale dont l'effet, à la vérité, est beaucoup moins sensible que celui de la réfraction verticale, puisqu'il est à peine de quelques secondes. Néanmoins, lorsque le concours de ces deux déviations a lieu, la courbe de réfraction est nécessairement à double courbure; mais alors il faut prendre plusieurs séries du même angle, et dans différentes circonstances, afin d'obtenir un résultat indépendant du déplacement, dans le sens latéral, des lieux apparens des objets que l'on compare.

Les opérations géodésiques que j'ai faites à Milan et dans les départemens environnans, m'ont donné de fréquentes occasions d'observer moi-même ce phéno-

angle va être l'objet de nos recherches.

FIG. 36 Soit C le centre de la terre, A et B deux signaux. Si du point A l'on observe le point B, celui-ci paraîtra en B' par l'effet de la réfraction; de même le point A paraîtra en A', observé du signal B.

Faisons les *distances apparentes* au zénith

$$ZAB' = \delta\,, \qquad VBA' = \delta'\,,$$

et les angles de réfraction

$$BAB' = r\,, \qquad ABA' = r'\,;$$

on aura pour les *distances vraies* au zénith

$$ZAB = \delta + r = D\,,$$
$$VBA = \delta' + r' = D'\,;$$

donc

$$ZAB + VBA = \delta + \delta' + r + r' \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

D'un autre côté, puisque l'angle extérieur d'un triangle vaut la somme des deux intérieurs opposés, on aura

$$ZAB = C + ABC$$
$$VBA = C + BAC\,;$$

donc

$$ZAB + VBA = 2^r + C = D + D' \ldots\ldots\ldots (2).$$

Ce résultat nous apprend que les deux distances vraies au zénith surpassent deux angles droits d'une quantité précisément égale à l'arc du grand cercle, mené d'un signal à l'autre.

Enfin des équations (1) et (2) on conclut

---

mène. Les chaleurs d'été tiennent continuellement suspendues les vapeurs qui s'exhalent de tous les canaux et rigoles qui arrosent le sol de la Lombardie, et c'est pour ainsi dire un autre phénomène que d'y voir l'atmosphère purifiée par les vents.

$$\delta + \delta' + r + r' = 2^{\prime} + C,$$

ou bien, à cause que r est sensiblement égal à r',

$$r = \frac{C}{2} - \tfrac{1}{2}(\delta + \delta' - 2^{\prime}) \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Divisant tout par C, l'on aura

$$\frac{r}{C} = \frac{\tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}(\delta + \delta' - 2^{\prime})}{C} = n \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

et enfin, $r = nC$.

n varie suivant l'état de l'atmosphère; et Delambre a remarqué en France, que n a environ pour valeur 0,075 en été, 0,08 en automne et au printemps, et qu'il varie de 0,09 à 0,10 en hiver. Si n était négatif, la réfraction abaisserait les images des objets, au lieu de les élever; mais ce phénomène est très-rare.

Il suit de ce qui précède, que

$$ZAB = \delta + r = 1^{\prime} + \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}(\delta - \delta'),$$
$$VBA = \delta' + r' = 1^{\prime} + \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}(\delta - \delta'),$$

104. Dans tous ces calculs nous avons supposé que les cercles étaient placés aux sommets des signaux, et c'est ce qui n'a pas lieu dans la pratique (*). Si, par exemple, le centre du cercle est au point a, la distance vraie du point B au zénith, est ZaB, et sa distance apparente observée $= ZaB$; désignons celle-ci par Δ, l'on aura évidemment

$$ZAB' = ZaB' + AB'a = \Delta + AB'a;$$

reste donc à déterminer l'angle $AB'a$, qui est l'erreur commise.

Soient $AB' = AB = B$, $Aa = dH$ et $AB'a = d\Delta$; le triangle $AB'a$ donnera

(*) On conçoit que pour que la réfraction soit déterminée avec exactitude, pour le moment de l'observation, il est essentiel que les distances des points A et B soient prises au même instant par deux observateurs.

$$\sin d\Delta = \frac{dH \sin \Delta}{B}.$$

Prenant l'arc pour le sinus, et réduisant en secondes (art. 31), il viendra

$$d\Delta = R'' \frac{dH \sin \Delta}{B} \dots\dots\dots\dots (5)$$

Lorsque les triangles sont calculés suivant la méthode de l'art. 69, on obtient la corde de l'angle C pour une sphère dont le rayon est la distance de l'horizon de la mer au centre de la terre, et cette corde est plus courte que la distance $aB=B$. Pour évaluer l'erreur, on pourrait rendre $d\Delta$ fonction de la corde connue K, et du rayon de la terre (Mémoire de Delambre, page 92); mais il sera suffisant, dans tous les cas, de faire usage de la formule précédente, en y substituant toutefois K pour B.

La correction précédente étant appliquée aux deux distances au zénith observées, on aura pour celles qui auraient été observées aux sommets des signaux

$$ZAB' = \Delta + d\Delta = \delta,$$
$$VAB' = \Delta' + d\Delta' = \delta'.$$

Telles sont les valeurs à employer dans les formules (3) et (4), pour estimer la réfraction; mais pour rendre cette théorie complète, indiquons les moyens de déterminer dH ou la hauteur du signal au-dessus de la lunette, lorsque cette hauteur ne peut être mesurée directement.

S'il s'agit d'une flèche qui ait peu d'élévation, on mesurera le diamètre à deux hauteurs différentes, ainsi que la différence des deux hauteurs, et l'on considérera cette flèche comme la pointe d'un cône tronqué. Or soient D, D' les diamètres inférieur et supérieur, h la distance des deux bases, x la partie du clocher qui s'élève au-dessus du diamètre supérieur D'; on aura par les Élémens de Géométrie

$$x = \frac{hD'}{D-D'}.$$

FIG. 37 Mais lorsque la pointe de la flèche est très-élevée, une petite

erreur sur la détermination des quantités $D-D'$ et h, pourrait en occasionner une très-grande sur la hauteur x. Alors soit B la pointe de la flèche observée du point A, B la galerie où a été placé le cercle: on mesurera les angles ZAB, ZAB'; et BAB' sera la différence des deux distances au zénith : or le triangle ABB' donne (art. 14)

$$BB' = \frac{AB' \sin A}{\sin B};$$

mais AB' est très-peu différent de $AB=K$, et l'on a $AB'B=\delta'+r'$, $ZAB'=\delta+r$; donc $B=2^{q}-A-(\delta'+r')$, donc BB' ou

$$dH = \frac{K \sin A}{\sin(\delta'+r'+A)} = \frac{K \sin A}{\sin[1^{q}+\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}(\delta'-\delta)+A]}$$
$$= \frac{K \sin A}{\sin[1^{q}-\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}(\delta'-\delta)-A]} = \frac{K \sin A}{\cos[\frac{1}{2}(\delta'-\delta)+\frac{1}{2}C+A]}.$$

Développant le dénominateur par la formule connue du cosinus de la somme de deux arcs, on aura

$$dH = \frac{K \sin A}{\cos\frac{1}{2}(\delta'-\delta+C)\cos A - \sin\frac{1}{2}(\delta'-\delta+C)\sin A};$$

mais $\frac{1}{2}(\delta'-\delta+C)$ étant un très-petit angle, on peut supprimer le terme où ce facteur entre; donc assez exactement

$$dH = \frac{K \tan A}{\cos\frac{1}{2}(\delta'-\delta+C)}.$$

Delambre qui fit usage de cette formule pour déterminer les hauteurs des flèches d'Amiens et d'Orléans, observait dH de deux stations voisines et prenait le milieu entre les deux résultats dont la différence était légère.

Calcul de la réfraction terrestre.

105. A 17^{m} au-dessous du sommet du signal A, on a observé FIG. 36 la distance au zénith $100^{gr},2408$ du sommet du signal B; réciproquement à $15^{m},1$ au-dessous de l'extrémité supérieure du signal B, on a observé la distance au zénith $99^{gr},9259$ du point A:

la distance rectiligne entre les deux signaux étant de $28504^{m},75 = B$, on demande la valeur de la réfraction et celle de son coefficient.

Pour réduire les distances au zénith, aux sommets des signaux, on fera usage de la formule (5) : ainsi, par rapport au signal A, on a

$$dH = 17, \qquad \Delta = 100^{gr},2408,$$

et par rapport au signal B,

$$dH' = 15,1, \qquad \Delta' = 99,9259;$$

$$\begin{aligned}
\log dH &= 1,23045 \\
l \sin\Delta &= 9,99999 \\
c\log B &= 5,54508 \\
l R'' &= 5,80388 \\
\hline
\log d\Delta &= 2,57940 = 379'',67 \\
\\
\Delta &= 100^{gr},240800 \\
+ d\Delta &= 0\ ,037967 \\
\hline
\text{Réduction au sommet } A &\ \Big\}\ 100^{gr},278767 = \delta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log dH' &= 1,17898 \\
l \sin\Delta' &= 9,99999 \\
c\log B &= 5,54508 \\
l R'' &= 5,80388 \\
\hline
\log d\Delta' &= 2,52793 = 337'',24 \\
\\
\Delta' &= 99^{gr},925900 \\
+ d\Delta' &= 0\ ,033724 \\
\hline
\text{Réduction au sommet } B &\ \Big\}\ 99^{gr},959624 = \delta'.
\end{aligned}$$

Lorsque les distances apparentes au zénith sont réduites aux sommets des signaux, on emploie les formules (3) et (4) pour avoir la réfraction r et son coefficient n. Ces formules exigent que l'on connaisse l'angle au centre C exprimé en parties de grade. Or la distance B ou K entre les deux signaux A et B, $= 28504^{m},75$, et le logarithme du rayon ρ de l'équateur $= 6,8045305$. Ainsi l'on aura C en faisant usage de la table III dont il a été parlé à la page 86, ou bien par la formule de l'art. 80, ou seulement à l'aide de $\frac{KR''}{\rho}$,

$$\begin{aligned}
\log K &= 4,4549172 \\
l R'' &= 5,8038801 \\
c\log\rho &= 3,1954695 \\
\hline
& \quad 3,4542668 = 2846'',21.
\end{aligned}$$

La distance AB répond donc à un arc de $28'4621$.

Voici maintenant le calcul de r.

$$\delta = 100^{gr},278767$$
$$\delta' = 99\ ,959624$$
$$\delta + \delta' - 200 = 0\ ,238391$$
$$\frac{\delta + \delta' - 200}{2} = 0\ ,119195$$
$$\tfrac{1}{2}C = 0\ ,142310$$
$$r = 0\ ,023115 \qquad \log r = 8,36389$$
$$c \log c = 0,54573$$
$$\log n = 8,90962$$

donc $n = 0,0812 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{12}$ environ.

Ainsi quand la réfraction est constante, on a

$$r = nC = (0,08)\,C.$$

La recherche des lois de la réfraction intéresse singulièrement l'astronomie. Les premiers succès en ce genre, sont dûs à Lambert; mais ensuite Euler et Lagrange sont parvenus à déterminer, d'une manière plus rigoureuse, la trajectoire décrite par un rayon de lumière qui traverse l'atmosphère. Enfin Laplace vient de perfectionner et de compléter cette théorie, dans le livre dixième de sa Mécanique Céleste.

CHAPITRE XVI.

Détermination de la différence de niveau sur la sphère, par les procédés géométriques.

106. DEUX ou plusieurs points sont dits de *niveau* entr'eux, lorsqu'ils appartiennent à une même surface semblable et concentrique à celle des eaux tranquilles de la mer; et une droite perdiculaire à la ligne de gravitation est dite une *ligne horizontale* ou une *ligne de niveau apparent*. Dans l'hypothèse que la terre est une véritable sphère, toutes les verticales ou lignes de gravitation passent par son centre; mais si l'on considère le globe terrestre comme un sphéroïde engendré par la révolution d'une ellipse autour de son petit axe, les verticales sont des normales à la surface de ce sphéroïde, quoiqu'elles ne passent pas toutes par le centre de la terre.

FIG. 37 Ces définitions étant bien comprises, soit C le centre du globe réputé sphérique, et A, B deux points inégalement éloignés de ce centre. Si AB' est une ligne de *niveau vrai* ou un arc terrestre, la hauteur $BB'=H$ sera la *différence* de niveau des deux points A, B: si, de plus, $ZAB=D=\delta+r$ est la distance vraie du point B au zénith, on aura, en faisant attention que $B'AC=1^q-\frac{1}{2}C$,

$$BAB'=2^q-ZAB-B'AC=2^q-D-1^q+\tfrac{1}{2}C$$
$$=1^q-D+\tfrac{1}{2}C$$
$$ABB'=AB'C-BAB'=1^q-\tfrac{1}{2}C-1^q+D-\tfrac{1}{2}C$$
$$=D-C;$$

or le triangle ABB' donne, en faisant la corde $AB'=K$,

$$H = \frac{K \sin A}{\sin B} = \frac{K \sin(1^q + \frac{1}{2}C - D)}{\sin(D - C)} = \frac{K \cos(\frac{1}{2}C - D)}{\sin(D - C)}. \quad (1)$$

Si l'on supposait ce triangle rectangle en B', il est facile de voir que l'on aurait assez exactement pour la différence de niveau cherchée, c'est-à-dire pour la quantité dont le point B est plus haut que le point de station A,

$$H = K \cot(\delta + r - \tfrac{1}{2}C), \quad (2)$$

et l'on aurait, par rapport au même niveau de A,

$$H = -K \cot(\delta' + r - \tfrac{1}{2}C). \quad (3)$$

Si l'on employait au contraire la formule

$$H = K \cot(\delta' + r - \tfrac{1}{2}C),$$

elle serait relative au niveau du point de station B, comme la formule (1), l'est au niveau du point A; on peut donc toujours faire usage de cette dernière formule.

Par l'art. 97 on a

$$ZAB = 1^q + \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}(\delta - \delta'),$$
$$VBA = 1^q + \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}(\delta - \delta'),$$

et il est clair que

$$BAC = 2^q - ZAB = 1^q - \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta),$$
$$B'AC = 1^q - \tfrac{1}{2}C$$
$$BAB' = BAC - B'AC = \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta)$$
$$B'BA = 2^q - VBA = 1^q - \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta).$$

ainsi

$$H = \frac{K \sin BAB'}{\sin ABB'} = \frac{K \sin \frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\cos \frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)}. \quad (4)$$

Cette formule est exacte; mais dans bien des cas, l'on peut faire $\frac{1}{2}C = 0$; alors, à cause de $\frac{\sin}{\cos} = \text{tang}$, on aura sensiblement

$$H = K \,\text{tang}\, \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta). \quad (5)$$

Lorsque $\delta' > \delta$, H est positif; le contraire a lieu si $\delta' < \delta$, δ étant la distance observée au lieu dont on connait l'élévation, et δ' celle au lieu dont on cherche l'élévation. Delambre est parvenu, par un calcul fort élégant, à la valeur de $\frac{1}{2}(\delta'-\delta)$, exprimée en fonction de H; mais le peu d'utilité de cette valeur nous dispense de tout détail à cet égard.

On pourrait éliminer r et K de toutes les formules où ces quantités entrent; car nous avons vu que $r=nC$, et il est facile de s'assurer que $K=2\rho\sin\frac{1}{2}C$, ρ étant le rayon de la terre correspondant au milieu de la corde K.

D'après ce qui précède, on voit comment l'on déterminera les élévations des sommets des signaux au-dessus d'un même horizon, de celui de la mer, par exemple: ainsi, en en retranchant les longueurs des signaux, on aura les hauteurs du sol au-dessus du niveau de la mer. L'exemple que nous donnerons de ce calcul fixera d'ailleurs les idées à cet égard; mais supposons pour le moment, que les points B, B', B''.... $B^{(n)}$ soient inégalement élevés au-dessus d'un horizon commun, de manière que h' soit l'élévation du point B' au-dessus du niveau de B; h'' l'élévation du point B'' au-dessus du niveau de B'; d$''$ la dépression du point B'' au-dessus de B'', et ainsi de suite: il est évident alors que l'on aura généralement

$$H - D = \text{différence de niveau.}$$

en prenant positivement les hauteurs h, et négativement les dépressions d supposées comptées de gauche à droite. Si cette formule a pour résultat le signe $+$, le point $B^{(n)}$ sera au-dessus du niveau de B, et si elle a le signe $-$, le point $B^{(n)}$ sera au-dessous du même niveau.

Concluons de là que si N est la hauteur du point B au-dessus du niveau de la mer, $N+H-D$ sera la hauteur de tout autre point au-dessus de ce niveau. La méthode que nous exposons, est celle qui est usitée dans la pratique du nivellement.

Les différences de niveau sur le sphéroïde pouvant être calculées comme sur la terre sphérique (Mémoire de Delambre, page 104), nous ne ferons qu'une observation à ce sujet; c'est qu'au

qu'au lieu de l'angle C formé au centre de la terre réputée sphérique, on pourra substituer un autre angle C ou $\varphi = \frac{R''K}{\rho}(1 - \frac{1}{2}e^2 \sin^2 L)$. *Voyez* l'art. 80 de cet ouvrage.

107. Lorsque l'on apperçoit l'horizon de la mer d'un lieu d'où l'on observe, il est facile de conclure immédiatement la hauteur de ce lieu au-dessus de la mer, au moyen de l'angle observé entre l'horizon et le zénith, et voici comment :

Si par le lieu B de l'observateur on imagine une tangente BA FIG. 38 à la surface de la mer, le rayon de la terre $CA = \rho$ sera évidemment perpendiculaire à AB. Si l'on imagine en outre une ligne de niveau ou un arc terrestre AB' intercepté entre le point A et la verticale VB, $BB' = N$ sera la hauteur cherchée. Or, faisant comme à l'ordinaire la distance vraie au zénith $VBA = D = \delta + r$, δ étant la distance apparente observée, et r la réfraction, le triangle rectangle CAB donnera, à cause de l'angle $CBA = 1^q - C$, et de $CA = \rho$,

$$CB = \frac{\rho}{\sin(1^q - C)} = \frac{\rho}{\cos C};$$

d'où il suit que

$$BB' = N = \rho\left(\frac{1 - \cos C}{\cos C}\right);$$

mais $1 - \cos C = \sin C \operatorname{tang} \frac{1}{2} C$; donc

$$N = \rho \operatorname{tang} C \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C;$$

d'ailleurs

$$C = 1^q - B = 1^q - (2^q - D) = D - 1^q, \text{ et } D = \delta + r;$$

donc

$$N = \rho \operatorname{tang}(\delta + r - 1^q) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta + r - 1^q) \ldots\ldots (6)$$

Lorsque r sera inconnue, on pourra en déduire la valeur de l'équation $r = nC$ (art. 103); mais il sera plus commode de transformer N en fonction de n, ainsi qu'il suit.

D'abord $C = \delta - 1^q$, en négligeant toutefois la réfraction : ainsi sans erreur sensible,

$$r = nC = n(\delta - 1^q).$$

Substitnant cette dernière valeur dans l'équation (6), et remarquant que l'on peut faire $\operatorname{tang} mx = m \operatorname{tang} x$, lorsque x est fort petit et que m est moindre que l'unité ou ne la surpasse guère, on aura

$$N = \tfrac{1}{2}\rho \operatorname{tang}^2 [\delta - 1' + n(\delta - 1')] = \tfrac{1}{2}\rho \operatorname{tang}^2.[(1+n)(\delta - 1')].$$

Donc, à très-peu de chose près,

$$N = \tfrac{1}{2}\rho (1+n)^2 \operatorname{tang}^2.(\delta - 1') \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Calcul de la différence de niveau.

FIG. 37 108. Toutes choses étant égales comme dans l'art. 105, on demande la différence de niveau des sommets des deux signaux A et B. Cette différence est donnée par la formule exacte (4)

$$H = \frac{K \sin \frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\cos \frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)},$$

$$\begin{array}{lr}
\delta' \ldots\ldots = & 99^{gr},959624 \\
\delta \ldots\ldots = & 100\ ,278767 \\
\hline
\delta' - \delta \ldots = - & 0^{gr},319143 \\
C \ldots\ldots = + & 0\ ,284621 \\
\hline
\delta' - \delta + C = + & 0^{gr},034522
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
\log K \ldots\ldots\ldots\ldots = & 4{,}45492 \\
L \sin \frac{1}{2}(\delta' - \delta) \ldots\ldots = & -7{,}39907 \\
c.L.\cos \frac{1}{2}(\delta' - \delta + C) \ldots = & +0{,}00000 \\
\hline
 & -1{,}85399 \\
\text{Donc} \ldots\ldots H = & -71^{m},447
\end{array}$$

Cherchons encore cette différence de niveau par la formule approchée (5), ou

$$H = K \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta),$$

$$\begin{array}{lr}
\log K \ldots\ldots\ldots = & 4{,}45492 \\
L.\operatorname{tang}\left(\frac{\delta' - \delta}{2}\right) \ldots = & -7{,}39907 \\
\hline
 & -1{,}85399 = -71^{m},448.
\end{array}$$

Il suit de là que le point B est plus bas que le point A, de $71^{m},45$.

Si l'on ne connaissait que la distance au zénith δ, prise au

point A, il faudrait recourir à la formule exacte (1), ou à celle approchée (2).

Dans le cas actuel

$$H = K \cot(\delta + 0{,}08\, C - 0{,}5 C) = K \cot(\delta - 0{,}42\, C),$$

$$\begin{array}{rl} \delta = & 100^{gr},278767 \\ -0{,}42\, C = - & 0\ ,119541 \\ \hline \delta - 0{,}42\, C = - & 100^{gr},159226 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log K \ldots\ldots\ldots = & 4{,}45492 \\ -L.\mathrm{tang}\ 15',9226 = - & 7{,}39813 \\ \hline & -1{,}85305 = -71^{m},29 \end{array}$$

Enfin, si l'on n'avait que δ', on aurait la différence cherchée par la formule (3),

$$H = -K \cot(\delta' + r - \tfrac{1}{2} C),$$

$$\begin{array}{rl} \delta' = & 99^{gr},959624 \\ -0{,}42\, C = - & 0\ ,119541 \\ \hline \delta' - 0{,}42\, C = & 99^{gr},840083 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} -\log K \ldots\ldots\ldots = & -4{,}45492 \\ +L\ \mathrm{tang}\ 15',9917 = & +7{,}40001 \\ \hline & -1{,}85493 = -71^{m},60 \end{array}$$

En prenant un milieu entre ces deux derniers résultats, on retombe sur le premier. Si dans cette dernière formule on eût fait K positif, la valeur de H aurait été elle-même positive, et pour lors elle eût exprimé que le point A est plus élevé que le point de station B (art. 106).

Nous venons d'obtenir la différence de niveau de deux points d'où l'on a pu observer simultanément les distances réciproques au zénith : cherchons maintenant celle de deux objets inaccessibles, mais dont on a les distances rectilignes au centre de station.

Du point A on a observé les distances au zénith des points FIG. 39 D, C; l'une de $100^{gr},367$, et l'autre de $100^{gr},8891$. On demande la différence de niveau de ces deux points; sachant d'ailleurs que leurs distances à la station A sont respectivement de $28108^{m},21$ et de $6448^{m},51$, et que le coefficient de la réfraction était ce jour-là de $0{,}08$. On a

$$\begin{array}{ll} K = 28108^{m},21 & K_1 = 6448^{m},51 \\ \delta = 100^{gr},367 & \delta_1 = 100^{gr},8891 \\ N = K \cot(\delta + r - \tfrac{1}{2} C) & N_1 = K_1 \cot(\delta_1 + r_1 - \tfrac{1}{2} C_1), \end{array}$$

ainsi la différence cherchée sera $N-N_1$;

$\log K \ldots\ldots = 4{,}44883$
$c.l.\rho \ldots\ldots = 3{,}19547$
$l.R'' \ldots\ldots = 5{,}80388$

$L.C. \ldots = 3{,}44818 = 2806'',63$

$\delta = 100^{gr},367000$
$-0{,}42\,C = -\ 0\ ,117878$

$100^{gr},249122$

$L.K. \ldots\ldots = 4{,}44883$
$-L.\text{tang}\ 24',9122 = -7{,}59253$

$-2{,}04136$

$= -110^{m} = N$

$\log K_1 \ldots\ldots = 3{,}80946$
$c.l.\rho \ldots\ldots = 3{,}19547$
$l.R'' \ldots\ldots = 5{,}80388$

$L.C_1 \ldots\ldots = 2{,}80881 = 643'',89$

$\delta_1 = 100^{gr},889100$
$-0{,}42\,C_1 = -\ 0\ ,027043$

$100^{gr},862057$

$L.K_1 \ldots\ldots = 3{,}80946$
$-L.\text{tang}\ 86',2057 = -8{,}13168$

$-1{,}94114$

$= -87^{m},325 = N_1.$

Donc la différence de niveau des deux points C, D, $= N - N_1 = -22^{m},68$ à très-peu-près.

Si l'on avait observé les mêmes points C, D, d'une autre station B, on aurait un moyen de vérification; car en opérant comme ci-dessus, on devra trouver le même résultat: ou si ces deux résultats diffèrent entr'eux de peu de chose, il conviendra d'en prendre le milieu lorsque l'on n'aura aucune raison d'adopter l'un plutôt que l'autre. C'est par de semblables opérations réciproques, que l'on nivellerait une base inclinée à l'horizon.

Calcul de la hauteur d'un lieu d'où l'on voit l'horizon de la mer.

FIG. 38 109. Du sommet d'une montagne on a observé la distance $100^{gr},3545$, entre l'horizon de la mer et le zénith; on demande la hauteur du centre de l'instrument au-dessus du niveau de la mer. On a, *formule* 7, *art.* 107,

$$N = \tfrac{1}{2}\rho\,(1+n)^2\,\text{tang}^2\,(\delta - 100)^2,$$

$\delta = 100^{gr},3545$	$\log 0,5 \ldots\ldots = 9,69897$
-100	$\log \rho \ldots\ldots = 6,80453$
$0^{gr},3545$	$L.(1,08)^2 \ldots\ldots = 0,06685$
	$L.\text{tang}^2(\delta - 100) \ldots = 5,49148$
	$2,06183 = 115^m,3.$

Donc le centre du cercle était élevé au-dessus de l'horizon de la mer, de $115^m,3$.

Supposons maintenant qu'on ait déterminé par la méthode de l'article précédent, la différence de niveau entre le sommet B de la montagne dont il s'agit, et un point quelconque P; ensuite la différence de niveau des points P, P'; puis des points P', P'', et ainsi de suite; de manière, par exemple, que la différence de niveau

entre B et P......... $= + 22^m,6$

entre P et P'........................ $= - 68,4$

entre P' et P''........................ $= - 27,1$

entre P'' et P'''........ $= + 40,8$

entre P''' et P''''....... $= + 12,0$

on aura (page 232)..$+H = + 75^m,4$; $-D = - 95,5$;

parconséquent la hauteur du point P'''' au-dessus du niveau de la mer sera, suivant la remarque de la page citée,

$$N + H - D = 115^m,3 + 75^m,4 - 95^m,5 = 95^m,2.$$

Les hauteurs des objets au-dessus d'un plan de comparaison sont principalement utiles pour former le relief d'une carte topographique. Les distances à la méridienne et à la perpendiculaire, et ces hauteurs s'enregistrent dans un même tableau, afin de reconnaître sur-le-champ les trois coordonnées de chaque lieu.

CHAPITRE XVII.

Détermination des hauteurs par les mesures barométriques.

110. De toutes les formules imaginées pour déterminer les hauteurs par les mesures barométriques, celle de Laplace paraît occuper le premier rang par la finesse de la théorie sur laquelle elle est fondée et par son exactitude, sur-tout depuis que cet illustre savant a pu la soumettre à l'épreuve d'un grand nombre d'observations, et l'établir pour tous les lieux de la terre et toutes hauteurs possibles au dessus du niveau de la mer. Nous croyons néanmoins que pour les besoins ordinaires de la géographie, cette formule peut être employée seulement telle que Ramond l'a appliquée lui-même aux Pyrénées, c'est-à-dire sans avoir égard à la variation de la pesanteur en latitude et dans le sens de la verticale.

Circonstances les plus favorables à l'observation, et emploi des instrumens.

C'est principalement sur les hautes montagnes que la marche du baromètre et du thermomètre est la plus irrégulière. « Depuis » le coucher du soleil jusqu'à son lever, dit Ramond (*), règnent » des vents descendans, occasionnés par le refroidissement des » cimes, et auxquels succèdent, vers le milieu du jour, des vents » ascendans, occasionnés par l'échauffement des plaines. L'effet

(*) Mémoire sur la mesure des hauteurs à l'aide du baromètre, etc., page 264 du Journal de Physique. (*Germinal an* 13.)

» de ces vents inclinés, qui deviennent presque verticaux dans
» certaines positions, est sensible, non-seulement sur le baromètre
» qu'ils tiennent tantôt au dessus et tantôt au dessous de la hauteur
» où il devrait se soutenir, mais encore sur le thermomètre, qui
» se trouve alors dans un courant d'air dont la température est
» fort différente, ainsi que Pictet l'a observé, de celle qu'il aurait
» dans son état d'équilibre ».

Ce n'est ordinairement que vers le milieu du jour que l'équilibre se rétablit dans l'atmosphère et que le calme paraît le plus complet. On reconnaît cette circonstance au baromètre et au thermomètre qui demeurent long-temps stationnaires, et c'est alors le moment le plus favorable à l'observation.

Il est essentiel de faire des observations contemporaines, lorsque l'on veut déterminer, d'une manière exacte, la différence des hauteurs de deux stations. C'est ainsi que Ramond et Dangos, l'un observant sur le pic du midi de Bigorre, l'autre à Tarbes, ont trouvé pour la différence des hauteurs de ces deux points, 2612^{met},92, quantité qui ne diffère en moins que de 0,2 environ de la hauteur obtenue par un nivellement exécuté avec un soin tout particulier. Ces habiles observateurs, munis d'excellens instrumens scrupuleusement comparés entr'eux, avaient fait enchâsser, comme il est d'usage, un thermomètre dans la monture de chaque baromètre; par ce moyen le mercure de ces deux instrumens éprouvait le même degré de température, dans le même état de caloricité de l'atmosphère. Sans ces précautions, les résultats de l'observation eussent été affectés d'erreurs assez graves, et l'auteur du Mémoire cité, s'est assuré, par des expériences directes, que plusieurs heures du jour, dans une station, ne suffisent pas pour amener le mercure du baromètre à la température de l'atmosphère. Pour mesurer cette température, on se sert d'un thermomètre *libre* ou sans monture, dont les divisions sont tracées sur le tube lui-même; on le suspend à l'extrémité d'un bâton de deux mètres de hauteur environ, fiché en terre, et incliné de manière à ce que son ombre se projette sur le tube du thermomètre; alors cet instrument est préservé de la chaleur des rayons du soleil, et l'air circulant librement autour de lui l'amène bientôt à sa température.

Lorsque l'on estime les hauteurs du baromètre et du thermomètre, il est utile d'observer toujours le même point physique de la surface du mercure, par exemple, le sommet de sa convexité.

Le baromètre lui-même doit être à l'abri de toute cause accidentelle de chaleur, et placé d'une manière stable, afin que le mercure n'ait aucune agitation; et il faut bien prendre garde dans le transport, que l'air ne divise la colonne mercurielle, ou ne s'insinue dans le haut du tube. On évite cet accident en fermant hermétiquement l'ouverture par où l'air entre librement, pendant l'observation, pour exercer sa pression sur le mercure.

On construit maintenant des baromètres très-portatifs, les uns à réservoirs, les autres à syphons; mais cette dernière forme paraît préférable, et c'est celle que Deluc adopta exclusivement. Dans l'un comme dans l'autre baromètre, ce que l'on nomme *sa hauteur* est la distance verticale du niveau inférieur au niveau supérieur de la colonne du mercure. Quand les divisions sont marquées sur la monture même du baromètre à syphon, c'est-à-dire à tube recourbé, on observe l'intervalle compris entre les deux niveaux dont nous venons de parler; mais il vaut mieux se servir d'une échelle graduée et tellement mobile, qu'elle puisse se hausser et se baisser le long de la monture : alors on fait correspondre l'index inférieur ou la première ligne de cette échelle, marquée o, au niveau de la surface la plus basse du mercure; ensuite on place l'index du nonius au niveau de la surface supérieure, et la hauteur du baromètre est la distance d'un index à l'autre. Il est très-important que les divisions de cet instrument donnent les centièmes de ligne, et que le niveau du bain du mercure affleure à un point de départ exempt de toute ambiguité; car on peut s'assurer qu'un dixième de ligne correspond à une couche d'air de 3 mètres d'épaisseur.

Malgré que dans toutes les formules propres à calculer les hauteurs par les observations barométriques, il n'y ait aucun terme dépendant de l'humidité de l'air, il conviendrait cependant de faire un grand nombre d'observations de ce genre, afin de pouvoir connaître, un jour, la valeur de la correction relative aux indications de l'hygromètre.

Après ces notions sur l'emploi des instrumens, voyons ce qui concerne leur théorie.

Démonstration

Démonstration de la formule de Laplace.

111. C'est un fait reconnu que la densité de l'air décroît, par des nuances insensibles, depuis la surface de la terre jusqu'aux limites de l'atmosphère; néanmoins pour découvrir plus facilement la loi de ce décroissement, nous considérerons l'air comme composé de tranches infiniment minces, et alors il nous sera permis de supposer sa densité constante dans toute l'épaisseur d'une même tranche.

On sait par expérience, qu'à température égale, l'air se comprime sensiblement en raison des poids dont il est chargé;

Qu'à pression égale, sa dilatation est à fort peu-près proportionnelle à l'accroissement de température, et de $\frac{1}{250}$ pour chaque degré du thermomètre centigrade;

Enfin, que le mercure se condense par le froid et se dilate par la chaleur, à peu-près proportionnellement au changement de température, et de $\frac{1}{5412}$ pour chaque degré du même thermomètre.

Cela posé, considérons une molécule d'air dont la densité $=D$, et dont la distance au centre de la terre $=a+z$, a étant la distance du même centre à la station inférieure. Nommons g la force accélératrice de la pesanteur, p la pression de l'atmosphère dans le lieu de la molécule, et exercée sur l'unité de surface; on aura pour l'équation de l'équilibre dans le baromètre, et à cause que p diminue quand z augmente,

$$dp=-gDdz;$$

en effet le poids d'une substance est égal à sa masse multipliée par la gravité, et la masse est égale à la densité multipliée par le volume.

La pression variant proportionnellement à la densité D de la molécule, multipliée par sa chaleur que nous désignerons par t, il s'ensuit que

$$p=KDt,$$

K étant une constante inconnue que l'expérience fait connaître.

Hh

Divisant la première équation précédente par celle-ci, on aura

$$\frac{dp}{p}=-g\,\frac{dz}{Kt};$$

et en intégrant,

$$\int\frac{gdz}{t}=-K\int\frac{dp}{p}+C=-K\log p+C.$$

La constante C se détermine en faisant $z=0$, et alors

$$C=K\log p',$$

p' étant la pression de l'atmosphère à la station inférieure ou à l'origine des z; partant

$$\int\frac{gdz}{t}=K\,(\log p'-\log p)=K\log\frac{p'}{p}. \qquad (1)$$

Comme l'intensité de la pesanteur est en raison inverse du quarré des distances, si l'on désigne par g' la pesanteur à la station inférieure, on aura à fort peu près

$$g=g'\,\frac{a^2}{(a+z)^2}=g'\left(1-\frac{2z}{a}\right);$$

faisant donc $z'=z\left(1-\frac{z}{a}\right)$, le premier membre de l'équation (1) deviendra, en éliminant g,

$$\int g\,\frac{dz}{t}=g'\int\frac{dz'}{t}. \qquad (2)$$

Pour intégrer la fonction $\int\frac{dz'}{t}$, il est nécessaire de connaître t en fonction de z'. Or pouvant supposer, sans erreur sensible, que dans l'intervalle, toujours assez petit, de la station inférieure à la station supérieure, la température diminue de l'une à l'autre à-peu-près en progression par différence. Soit, pour simplifier le calcul,

$$t=\sqrt{t'^2-iz'},$$

t' étant la température de l'air ambiant à la station la plus basse, et i étant déterminé de manière que cette expression de t repré-

sente la température de l'air à la station la plus haute, nous aurons

$$\int \frac{dz'}{t} = \frac{2z'}{t+t'};$$

ainsi l'équation (2) deviendra

$$K \log \frac{p'}{p} = g' . \frac{2z'}{t+t'};$$

si donc on prend le logarithme tabulaire, on aura

$$z' = \frac{KM}{g'} \left(\frac{t+t'}{2}\right) \log \frac{p'}{p}, \qquad (a)$$

$M = 0{,}4342945$ étant le module.

Afin de nous rapprocher autant que possible des phénomènes qui se passent dans l'atmosphère, il faut remarquer que la chaleur augmentant l'élasticité de l'air ou diminuant sa densité, on doit s'élever davantage pour faire baisser le baromètre d'une même quantité; le coefficient $\frac{KM}{g'}$ supposé calculé pour la température de la glace fondante, doit donc éprouver une augmentation de $\frac{1}{250}$ pour chaque degré de la division centigrade; par-conséquent au lieu de $\frac{KM}{g'}$, on écrira dans la formule (a)

$$\frac{KM}{g'} + \frac{1}{250} \frac{KM}{g'} \frac{(t+t')}{2} = \frac{KM}{g'} \left(1 + 2 \frac{(t+t')}{1000}\right).$$

Ramond, à qui l'on doit un grand nombre d'observations barométriques, a déduit récemment la valeur du coefficient $\frac{KM}{g'}$ d'une série d'opérations trigonométriques faites avec le plus grand soin, et a trouvé que sur le parallèle de 50 grades,

$$\frac{KM}{g'} = 18336^{\text{mèt}};$$

il suit de là, et en faisant usage de la correction précédente, que sur ce parallèle,

$$z' = 18336^{\text{mèt}} \left(1 + \frac{2(t+t')}{1000}\right) \log \frac{p'}{p}. \qquad (b)$$

Les pressions p' et p étant proportionnelles aux hauteurs correspondantes h' et h du baromètre, on devrait écrire ici $\log\frac{h'}{h}$ au lieu de $\log\frac{p'}{p}$; mais pour avoir égard à la condensation du mercure, qui a dû s'opérer dans la station la plus froide, et où la colonne de ce fluide métallique a dû paraître un peu plus courte que si on l'avait observée dans une station inférieure sous la même pression, il faut augmenter cette colonne à raison de $\frac{1}{5412}$ pour chaque degré contenu dans la différence entre les températures observées aux deux stations extrêmes. Ainsi on aura $h+h\left(\frac{T'-T}{5412}\right)$ au lieu de h, T et T' exprimant les températures respectives du mercure des baromètres, dans les stations supérieure et inférieure.

Cette correction de température ne suffit pas encore; il faut, de plus, réduire les hauteurs observées du baromètre, à la même pesanteur g' relative à la station inférieure. La pesanteur à la station supérieure est $g=g'.\frac{a^2}{(a+z)^2}=g'.\frac{1}{\left(1+\frac{z}{a}\right)^2}$; en nommant donc h' et H les hauteurs observées du baromètre, aux deux stations, et réduites à la même température, auquel cas $H=h+h\left(\frac{T'-T}{5412}\right)$, ces hauteurs réduites à la même pesanteur du mercure, seront h' et $\frac{H}{\left(1+\frac{z}{a}\right)^2}$; on a ainsi

$$\log\frac{p'}{p}=\log\left(\frac{h'\left(1+\frac{z}{a}\right)^2}{H}\right)=\log\frac{h'}{H}+2\log\left(1+\frac{z}{a}\right);$$

mais $\log\left(1+\frac{z}{a}\right)=M\left\{\frac{z}{a}-\frac{z^2}{2a^2}+\ldots\right\}$, et puisque $\frac{z}{a}$ est une très-petite fraction, on a à fort peu-près

$$\log\left(1+\frac{z}{a}\right)=\frac{Mz}{a}=\frac{z}{a}.0,4342945;$$

parconséquent

$$\log\frac{p'}{p}=\log\frac{h'}{H}+\frac{z}{a}.0,868589,$$

et la formule (b) devient, en mettant à la place de z' sa valeur $z\left(1-\frac{z}{a}\right)$,

$$z=18336^{mt}\left(1+\frac{2(t+t')}{1000}\right).\left\{\left(1+\frac{z}{a}\right).\log\frac{h'}{H}+\frac{z}{a}.0{,}868589\right\}.$$

Reste à faire connaître le changement que le coefficient 18336 doit éprouver sous une latitude ψ autre que celle de 50^{gr}. Or la pesanteur diminuant à mesure que l'on s'approche de l'équateur, et cette diminution étant indiquée par le raccourcissement du pendule à secondes, il est clair que la correction actuelle est proportionnelle à l'effet de cette cause; ce qui exige que le coefficient 18336 soit multiplié par le facteur $\frac{1}{1+\frac{0{,}004208}{0{,}739502}\sin^2\psi}$, (*Mécanique Céleste*, livre III, n° 42); mais parceque $\sin^2\psi=\frac{1-\cos 2\psi}{2}$, ce facteur devient $1+0{,}002845\cos 2\psi$, et l'on a enfin

$$z=18336^{mt}(1+0{,}002845\cos 2\psi).\left(1+\frac{2(t+t')}{1000}\right).\left\{\left(1+\frac{z}{a}\right).\log\frac{h'}{H}+\frac{z}{a}.0{,}868589\right\}.$$

Telle est la formule que Laplace vient de publier et de démontrer dans le livre X de sa Mécanique Céleste : pour la soumettre au calcul, on pourra, sans erreur sensible, supposer $a=6366198^{mt}$, et prendre pour valeur de z dans le second membre, celle qui résulte de la supposition de $z=0$ dans ce même membre.

Calcul des hauteurs, par la théorie précédente.

112. Pour rendre plus facile l'application de la formule que nous venons de démontrer, nous ferons abstraction de la variation de la pesanteur en latitude et dans le sens de la verticale; mais alors afin que le résultat soit un peu plus exact, nous emploierons, au lieu du coefficient constant 18336^{mt}, le coefficient 18393, dont Ramond a lui-même fait usage aux Pyrénées. Toutes les fois donc que les hauteurs à déterminer seront peu considérables et non loin de la latitude de 50^{gr}, la différence z des hauteurs de deux stations voisines sera donnée par la formule

$$z = 18393^{mm}\left(1+\frac{2(t+t')}{1000}\right).\log\left(\frac{h'}{h+h\frac{(T'-T)}{5412}}\right).$$

t étant la température de l'air dans la station supérieure............................	Thermomètres libres à mercure.
t' la température de l'air dans la station inférieure................................	
T la température du mercure du baromètre dans la station supérieure.....................	Thermomètres attachés aux baromètres.
T' la température du mercure du baromètre dans la station inférieure....................	

h la hauteur du baromètre dans la station supérieure.

h' la hauteur du baromètre dans la station inférieure (*).

Nous prendrons pour exemple les mesures que Ramond et Dangos obtinrent aux Pyrénées, et à l'aide desquelles ils déterminèrent la hauteur du pic du midi de Bigorre, au-dessus de Tarbes.

Le 4 vendémiaire an 12 à midi.

	Baromètre.	Therm. du Baromètre.	Thermomètre libre.
Sommet du pic......	$h = 537{,}203^{millim.}$	$T = +\ 9{,}75^{centig}$	$t = +\ 4,^{centig.}$
Cabinet de M. Dangos	$h' = 735{,}581$	$T' = +18{,}625$	$t' = +19{,}125$
		Différence 8,875	Somme 23,125
			2 sommes 46,25

Baromètre inférieur $735^{millim},581$ log.................		2,8666305
Baromètre supérieur 537 ,203 log..	2,7301384	
5412 + différence des therm. de correct. = 5412 + 8,875 = 5420,875 log..	3,7340694	
Comp. log 5412 (log. constant).......	6,2666422	
Baromètre supérieur corrigé........	2,7308500	2,7308500
Différence des logarithmes....................		0,1357805

(*) Ces hauteurs peuvent être exprimées en millimètres ou en lignes; mais la température doit être donnée en degrés du thermomètre décimal, ainsi que l'exige la formule précédente.

Correction pour la température de l'air.

Différence des logarith. 0,1357805 log. . 9,1328374

$\log \frac{1000 + 2\ \text{sommes des Therm.}}{1000} = \frac{1046,25}{1000} = 1,0465$. 0,0196355

Coefficient 18393 (log constant) 4,2646526

Hauteur cherchée . . . . 3,4171255 2612^{met},916

La mesure géom. de cette hauteur relative = 2613^{m},137
et la mesure barométrique . . . . = 2612 ,916

La différence en moins n'est donc que de . . 0^{m},221

Il nous resterait à déterminer la hauteur absolue de l'une des stations, c'est-à-dire sa hauteur au-dessus du niveau de la mer; mais il suffit d'observer que cette hauteur se déduit assez exactement de la formule ci-dessus, en supposant que la hauteur moyenne du baromètre au niveau de l'Océan est de 0^{m},7629, la température de l'air étant à 12° centésimaux. Dans ce calcul il faudra de même employer les hauteurs moyennes du baromètre et du thermomètre, prises à la station dont on veut avoir l'élévation au-dessus de la mer, ce qui exige que l'on fasse, pendant plusieurs années, beaucoup d'observations météorologiques. Alors on supposera dans la formule, $T=t$, $T'=t'$. (Consultez d'ailleurs, sur ce point, l'Astron. physiq. de Biot, page 144).

C'est à l'opération précédente que pourra, presque toujours, se borner le calcul des hauteurs des montagnes, comme nous l'avons déjà dit; cependant, si on desire un résultat plus exact, il conviendra de tenir compte de la pesanteur en latitude, sans toutefois renoncer à l'ancien coefficient 18393 trouvé par Ramond; parceque, comme l'observe ce savant, ce coefficient renferme la correction de la pesanteur dans le sens de la verticale, pour les hauteurs d'environ 3000 mètres; et il est à remarquer que la table qu'il vient d'insérer dans la 2e édition de son Mémoire, et qui donne directement le logarithme du coefficient 18393, corrigé de l'effet de la latitude, dispense de tout calcul à cet égard. Malgré cela, quand on aura fait usage de bons instrumens, et que l'on

sera fondé à croire qu'aucune cause perturbatrice n'est de nature à influer sensiblement sur le résultat de l'observation, il faudra, pour déterminer avec une très-grande justesse les élévations des hautes montagnes, employer la formnle (art. 111) dans toute son intégrité, et le calcul sera commode en mettant cette formule sous la forme

$$z = \log\left(\frac{h'}{H}\right).\left(\frac{1000+2(t+t')}{1000}\right).18336.(1 \pm 0{,}002845 \cos 2\psi)\left\{1 + \frac{\left(\log\left(\frac{h'}{H}\right)+0{,}868589\right).\frac{z}{a}}{\log\left(\frac{h'}{H}\right)}\right\};$$

le signe supérieur ayant lieu quand la latitude de la station est moindre que 45 degrés, et le signe inférieur devant être pris dans le cas contraire.

Calcul exact de la formule précédente, appliquée à la mesure de la hauteur du Chimboraço, *dont la latitude est de* 1°. 45′.

		Baromètre.	Therm. du Baromèt.	Therm. libre.
Observations de M. Humboldt.	Chimboraço.	167,2 lignes.	+ 10,0 centigr.	− 1,6 centigr.
	Mer du sud.	337,7	+ 25,3	+ 25,3
		Différence......	15,3	Somme 23,7
				2 sommes 47,4

Baromètre inférieur 337,7 lignes log................		2,5285311
Baromètre supérieur 167,2 lignes log..	2,2232363	
5412 + différence des therm. de correct. = 5427,3 log....................	3,7345838	
Comp. log 5412 (log. constant)........	6,2666422	
Baromètre supérieur corrigé.......	2,2244623	2,2244623
Différence des logarithmes...................		0,3040688

Correction

Correction pour la température de l'air.

Différence des logarith. 0,3040688	log.	9,4829718
$\frac{1000+2\text{ sommes des Therm.}}{1000}=\frac{1047,4}{1000}=1,0474$	log.	0,0201126
Coefficient 18336 (log. constant)......		4,2633046
Somme des logarithmes..........		3,7663890

Correction pour la latitude.

Somme des logarithmes....				3,7663890
log cos 3°.30′=2 fois latitude.	9,9991892			
log du nomb. const. 0,002845.	7,4540823			
	7,4532715	0,0028397		
		+1,		
		1,0028397	log.	0,0012315
Hauteur approchée..........................				3,7676205 5856m,262

Correction pour la diminution de la pesanteur dans le sens de la verticale.

Hauteur approchée, log..........................			3,7676205 5856m262
Différence des logarithmes.......	0,3040688		
Nombre constant............	0,868589		
	1,1726578	log...	0,0691712
Comp. log 6366198 (log. constant)...................			3,1961199
Hauteur approchée, log............................			3,7676205
			0,8005321
Log. de la différence des logarithmes, à soustraire.......			9,4829717
			1,3175604 + 20,775
Hauteur absolue du Chimboraço......................			5877,037

On trouverait par un calcul semblable, 2613m,22 pour la hauteur relative du pic du midi de Bigorre, situé à la latitude de 43°; ainsi la différence entre le résultat rigoureux et celui du calcul approximatif est si petite, qu'il est probable qu'elle est en-deçà de l'erreur provenant de l'observation.

Usage du baromètre pour déterminer les distances horizontales.

113. Les ingénieurs qui doivent tracer rapidement la topographie d'un pays de montagnes, peuvent, pour cet effet, tirer un grand parti de leurs observations barométriques; car on conçoit que si deux observateurs prennent simultanément les distances au zénith, des divers sommets où l'on porte les baromètres, on pourra ensuite, à l'aide des hauteurs déterminées par la méthode précédente, calculer les distances horizontales comprises entre les verticales de ces sommets. Or si z est la hauteur relative ou la différence de niveau des deux points de stations; δ, δ' les distances au zénith observées; et B la distance horizontale cherchée, on aura par l'article 106,

$$z = B \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta - \delta'),$$

d'où l'on tire sur-le-champ

$$B = \frac{z}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\delta - \delta')} = z \cot \tfrac{1}{2}(\delta - \delta').$$

Ainsi *la distance itinéraire de deux points de station est égale à leur différence de hauteur, donnée par les baromètres, et multipliée par la cotangente de la demi-différence des distances au zénith observées.* Le seul cas où la distance B ne peut être déterminée, arrive lorsque les deux distances au zénith sont égales, ce qui est évident.

Cela posé, soit

$$z = 71^{m},448, \quad \delta = 100^{gr}.27'.87'',67, \quad \delta' = 99^{gr}.95'.96'',24,$$

on aura par les logarithmes

$$\log z = 1,8539891$$
$$\log \cot\left(\frac{\delta - \delta'}{2}\right) = 2,6009281$$
$$\log B = 4,4549172 = 28504^{mèt},75;$$

donc la distance cherchée est de $28504^{mèt},75$.

En opérant ainsi de sommet à sommet, on aura en peu de temps une assez bonne triangulation; et dans ce cas, il est remarquable que les différences de niveau se déterminent par le baromètre, beaucoup plus exactement que lorsque les observations correspondantes sont faites dans des régions où l'air peut se trouver dans des états très-différens.

Ce serait ici le lieu de parler des niveaux dont les ingénieurs des ponts et chaussées font principalement usage lorsqu'ils nivellent une grande étendue de terrain, soit pour construire des grandes routes, soit pour ouvrir des canaux, ou pour établir tout autre ouvrage dans lequel il importe de déterminer la quantité exacte des déblais et des remblais. A cet égard, nous pourrions faire connaître l'instrument connu sous le nom de *niveau à bulle d'air*, perfectionné par feu M. Chézi, inspecteur des ponts et chaussées; mais nous pensons que le cercle répétiteur doit être employé de préférence dans les nivellemens, toutes les fois que l'on veut atteindre à une grande précision; il serait donc à desirer que cet instrument devînt d'un usage plus général.

Nous terminerons ici tout ce que nous avions à dire touchant la géométrie appliquée sur le terrain; et nous allons faire connaître les méthodes astronomiques qui sont le complément de la science que nous avons entrepris de développer.

LIVRE IV.

PROBLÈMES D'ASTRONOMIE.

CHAPITRE PREMIER.

Calcul de la déclinaison du soleil pour un autre méridien que celui de Paris.

114. LES Tables de la *Connaissance des Temps* n'étant pas encore calculées suivant le système décimal, nous emploierons dorénavant la division du jour en 24 heures, et cello du cercle en 360 degrés; ainsi, lorsqu'on aura observé un angle avec le cercle répétiteur divisé en 400 grades, on le convertira sur-le-champ en degrés, à l'aide des tables destinées à cet usage, ou par un procédé de calcul facile à imaginer.

1er *Exemple.* On demande la déclinaison du soleil le 29 ventose an 11 (8 *mars* 1803), à midi, à Porto-Ferraio (île d'Elbe), dont la longitude *Est*, au méridien de Paris, est de 7°.59'.20",2.

Puisque Porto-Ferraio est à l'orient de Paris, et que la longitude 7°.59'.20",2, réduite en temps à raison de 15° par heure, est de 31'.57",7; il s'ensuit que lorsqu'il est midi à Porto-Ferraio le 28 ventose, il est 31'.57",7 de moins à Paris; c'est-à-dire, 23^h.28'.2",3 le 27 ventose, *temps astronomique.* La question est donc réduite à trouver, pour cette heure, la déclinaison du soleil.

Déclinaison du soleil à Paris le 28 ventose an 11,
à midi vrai.................................. 0°.48′.53″
Déclinaison............... le 29............... 0 .25 .11

Variation diurne en déclinaison......... — 0°.23′.42″

Partie proportionnelle pour 23h.28′.2″,3..... — 0°.23′.10″,4
puisqu'en 24h la déclinaison diminue de 0d.23′.42″.
Déclinaison du ☉ le 28 à Paris.................. 0 .48 .53

Déclinaison du ☉ à Porto-Ferraio le 29 ventose,
an 11, à midi.................................. 0°.25′.42″,6

2e *Exemple.* Trouver la déclinaison du soleil, le 30 ventose an 11, à Porto-Ferraio.

Déclinaison du ☉ à Paris pour midi, 29 ventose... 0°.25′.11″
Déclinaison le 30.............................. 0 . 1 .28

Variation diurne........................... — 0°.23′.43″

Partie proportionnelle pour 23h.28′.2″,3...... — 0°.23′.11″,4
Déclinaison le 29, à Paris..................... 0 .25 .11

Déclinais. australe le 30 ventose à midi, à Porto-F. 0°. 1′.59″,6

3e *Exemple.* Trouver la déclinaison du soleil, le 1er germinal an 11 à Porto-Ferraio.

Déclinaison du ☉ à Paris, pour midi,
30 ventose an 11........................ 0°. 1′.28″. Australe.
Déclinaison le 1er germinal........... 0 22 .13. Boréale.

Changement en déclinaison pour 24 heur. 0°.24′.41″.
(Ces deux déclinaisons s'ajoutent, parcequ'elles sont de dénominations différentes).
Partie proportionnelle pour 23h.28′.2″,3. 0°.23. 9″,4
Déclinaison du ☉ à Paris, le 30 ventose. 0 . 1 .28″,0
Déclinaison boréale du ☉ pour Porto-
Ferraio, à midi, 1er germinal.......... 0°.21′.41″,4.

Ainsi la variation diurne du 30 ventose au 1er germinal, à midi, à Porto-Ferraio comme à Paris, était de 23′.41″.

CHAPITRE II.

Calcul de l'heure du Passage des étoiles au méridien.

115. En ajoutant la distance de l'équinoxe au soleil pour un jour proposé, à l'ascension droite moyenne de l'étoile à cette époque, réduite en temps à raison de 15° par heure, la somme résultante ou son excès sur 24 heures sera l'heure très-approchée du passage de l'étoile par le méridien.

FIG. 40 Il est aisé de se rendre raison de cette règle ; car si E est le point équinoxial du printemps, c'est-à-dire le point de l'équateur céleste où se trouve le soleil lorsque le printemps commence, et MP un méridien quelconque, celui de Paris par exemple, l'arc ME sera la distance de l'équinoxe du soleil S à midi, et l'arc $EQCM$ sera son ascension droite comptée toujours dans le sens du mouvement de la terre ou de l'ouest à l'est. L'arc $EQMB$ sera de même l'ascension droite de l'étoile A, et il est évident que l'on aura $BM = EQCMB - EQCM$, ou bien

$$BM = EQCMB + ME - 360°,$$

à cause de $EQCM = 360° - ME$. Lorsque le soleil S passe au méridien, l'étoile A y passe donc plus tard, et après un certain nombre d'heures exprimé par l'arc BM réduit en temps.

1er *Exemple.* Trouver à quelle heure *Sirius* a dû passer au méridien de Paris, le 8 messidor an 12 (15 *juin* 1804).

Distance de l'équinoxe au soleil, le 8 messidor an 12, à midi.................................. $17^h.35'.57'',3$

Ascension droite moyenne de Sirius, pour le 11 nivose an 8.................. $99°.4'.58''$

La variation annuelle en ascension droite étant de $39'',7$, on aura pour celle qui répond au temps écoulé depuis le 11 nivose an 8, jusqu'au 8 messidor an 12........... $2'.58'',65$

$99°.7'.56'',65 = 6\,.36\,.31\,,7$

Somme...... $24^h.12'.29''$.
Moins....... 24

Temps approché du passage de Sirius au méridien.. $0^h.12'.29''$.

Il faudrait, pour plus d'exactitude, calculer la distance de l'équinoxe au soleil, pour le temps approché du passage de l'étoile au méridien, et corriger ensuite l'ascension droite moyenne de l'étoile, de l'aberration et de la nutation; c'est à quoi l'on parviendra, à l'aide du procédé employé dans l'article suivant, où il s'agit de déterminer pour l'étoile polaire, les aberrations et les nutations en ascension droite et en déclinaison.

Formules générales des aberrations et des nutations.

116. Lorsqu'on sera dépourvu de tables des aberrations et des nutations, on y suppléera au moyen des formules suivantes, dont on trouvera les démonstrations dans la Trigonométrie de Cagnoli, page 398.

$$\text{aber. asc. droit.} = -\frac{19'',17\cos(A-\odot)-0'',83\cos(A+\odot)}{\cos D}\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\text{aber. décl.} = \sin D(19'',17\sin\overline{A-\odot}-0'',83\sin\overline{A+\odot})-7'',96\cos\odot\cos D. (2)$$

A étant l'ascension droite de l'étoile, D sa déclinaison et $\odot$ la longitude du soleil. Lorsque la déclinaison D est australe, il faut que le facteur $7'',96$ soit positif; quant à $\sin D$, il doit être

toujours positif. C'est sur ces formules que sont construites les Tables de Delambre, (Connaissance des Temps pour 1788, page 226).

$$\text{nut. asc. droit.} = -15'',4\sin\Omega - \tang D(7'',85\cos\overline{A-\Omega} + 1'',15\cos\overline{A+\Omega})\ldots(3)$$

$$\text{nut. décl.} = 7'',85\sin(A-\Omega) + 1'',15\sin(A+\Omega)\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Ω désignant la longitude du nœud de la lune. Lorsque la déclinaison est australe, le second membre de cette dernière formule doit être négatif. Les Tables de Lambert, pour la nutation en ascension droite et en déclinaison, ont été construites d'après ces mêmes formules.

Application des formules précédentes à l'étoile polaire observée le 9 vendémiaire an 11, (1[er] octob. 1802).

Calcul de l'aberration en ascension droite.

L'ascension droite moyenne de l'étoile polaire, pour le 9 vendémiaire an 11, ou ..... $A = 0^s.13°.14'.6'',5$

A cette même époque, la longitude du soleil, ... $☉ = 6\,.\,7\,.34 \ldots\ldots\ldots\ 7°.34'.0''$

$A + ☉ \ldots = 200°.48'.6'' \ldots = 20°.48'.6''$

$A - ☉ \ldots = -174\,.19\,.54 \ldots = 5\,.40\,.6$

Or ce jour-là la déclinaison D de l'étoile était de $88°.15'.19'',6$, donc

Log 19″,17 = 1,28252		− Log 0″,83 = −9,91908
L. cos (A−☉) = −9,99787		L. cos(A+☉) = −9,97072
C. L. cos D = 1,51653		C. L. cos D = 1,51653
−2,79702 = −626″,70		+1,40633 = +25″,48
+ 25 ,48		
−601″,22		

Donc l'aberration en ascension droite $= 601'',22 = 10'.1'',22$.

Calcul

Calcul de la nutation en ascension droite.

L'ascension droite de l'étoile, $A =$ 0ˢ. 13°. 14′. 6″.
La longitude du nœud de la lune, pour le 9 vend. an 11.. ☊ = 11 . 10 . 6....... 19°. 54′

$A +$ ☊ = 353°. 20′. 6″... 6°. 39′. 54″
$A -$ ☊ = − 326 . 51 . 54 ... 33 . 8 . 6

Log 7″,85 = 0,89487	Log 1″,15 = 0,06070
cos (A − ☊) = 9,92292	cos (A + ☊) = 9,99705
− tang D = − 1,51633	− tang D = − 1,51633
− 2,33412 = − 215″,83	− 1,57408 = − 37″,5
− 37 ,5	− log 15″,4 = − 1,18752
− 253″,33	sin ☊ = − 9,53196
+ 5 ,24	+ 0,71948 = 5″,24
− 248″,19	

ainsi la nutation en ascension droite = − 248″,09 = − 4′. 8″,09.

Récapitulation.

Ascension droite moyenne..............	=	13°. 14′. 6″,5
Aberration.................	+	10 . 1 ,2
Nutation.................	−	4 . 8 ,1
Ascension droite apparente...........	=	13°. 19′. 59″,6

Calcul de l'aberration en déclinaison.

L. 19″,17 = 1,28262	− L. 0″,83 = − 9,91908
sin(A − ☉) = − 8,99460	sin(A + ☉) = − 9,55041
sin D = 9,99979	sin D = 9,99979
− 0,27701 = − 1″,89	+ 9,46928 = + 0″,29

$$
\begin{array}{rl}
-L.7'',96 = & -0,90091 \\
\cos \odot = & -9,99620 \\
\cos D = & 8,48347 \\
\hline
& +9,38058 = +0'',24 \\
& \qquad +0,29 \\
\hline
& \qquad +0,53 \\
& \qquad -1,89
\end{array}
$$

Donc, aberrat. en décl. $= -1'',36$

Calcul de la nutation en déclinaison.

$$
\begin{array}{rl}
L.\ 7'',85 = & 0,89487 \\
\sin(A - \Omega) = & 9,73769 \\
\hline
& +0,63256 = +4'',29 \\
& \qquad -0,13
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
L.\ 1'',15 = & 0,06070 \\
\sin(A + \Omega) = & -9,06480 \\
\hline
& -9,12550 = -0'',13
\end{array}
$$

Donc, nutat. en décl. $= +4'',16$

Récapitulation.

Déclinaison moyenne	=	88°. 15'. 19",6
Aberration.............	—	1 ,36
Nutation................	+	4 ,16
Déclinaison apparente	=	88°. 15'. 22",4

117. Voici maintenant le calcul de l'heure vraie du passage de l'étoile polaire au méridien.

2e *Exemple.* On demande quelle a été l'heure vraie du passage de l'étoile polaire au méridien de Porto-Ferraio, le 9 vendémiaire an 11 (1er *octobre* 1802)?

Ascension droite moy. de l'étoile, le 11 nivose an 8	13°. 5'. 15"
Variation annuelle pour 2 ans $\frac{3}{4}$.............	8 .51 ,5
Ascension droite moyenne, le 9 vendém. an 11.	13°. 14'. 6",5

La longitude du soleil, le 9 vendémiaire, étant

de $6^s.7^\circ.34'$, l'aberration en ascension droite... = + 10 . 1,2

La longitude du nœud de la lune, à la même époque, étant de $11^s.10^\circ.6'$, la nutation est..... — 4 . 8,1

Ascension droite apparente de l'étoile........ $13^\circ.19'.59'',6$

Cette ascension réduite en temps, à raison de 15° par heure, donne........................ $0^h.53'.19'',97$

Distance de l'équinoxe au soleil, le 9 vendémiaire, pour midi, à Paris.......................... 11 .32 .13

Temps approché du passage de l'étoile au méridien de Paris.................................. $12^h.25'.32'',97$

Diminution proportionnelle de la distance de l'équinoxe, à raison de $0^h.3'.37'',6$ par 24^h; c'est-à-dire faites la proportion

$24^h : 12^h.25'.32'',97 :: 3'.37''.6 : x = 1'.52'',66$... — 1 .52,66

Heure précise du passage de l'étoile au méridien de Paris.................................. $12^h.23'.40'',31$

Autre correction de la distance de l'équinoxe pour $31'.57''$, différence entre les méridiens; laquelle doit se faire comme ci-dessus, à raison de $3'.37'',6$ par 24^h, et se prendre en plus, parceque Porto-Ferraio est à l'est de Paris; elle se prendrait au contraire en moins, pour un lieu qui serait à l'ouest....... + 4'',80

Temps vrai astronomique du passage de l'étoile polaire par le méridien de Porto-Ferraio, le 9 vendémiaire an 11.................................. $12^h.23'.45'',11$

On aura ensuite le temps moyen du passage par la méthode de l'art. 122.

Quand on a trouvé comme ci-dessus le temps approché du passage de l'étoile au méridien de Paris, on peut achever plus promptement le calcul ainsi qu'il suit:

Temps approché du passage au méridien de Paris. $12^h.25'.32'',97$

Différence des méridiens, à l'est, réduite en temps. — 31 .57,00

Ainsi lorsque l'étoile passait au méridien de Porto-Ferraio, il était à peu-près à Paris............. $11^h.53'.35'',97$

Correction de la distance de l'équinoxe au soleil pour cette heure, calculée à raison de 3'.37",6 par 24^h, et qui doit toujours être retranchée........	— 1'.47",86
Heure approchée du passage au méridien de Paris....................................	+ 12 .25 .32 ,97
Temps vrai ou apparent du passage de l'étoile au méridien de Porto-Ferraio..................	12^h.23'.45",11

Pour faire voir que ce second procédé revient au précédent, soit h, l'heure approchée du passage de l'étoile au méridien de Paris, δ la différence des méridiens, et ν la variation diurne de la distance de l'équinoxe au soleil. Ainsi, par le premier procédé, l'heure approchée du passage étant h, la diminution proportionnelle de la distance de l'équinoxe, à raison de ν par 24^h, sera $-\frac{\nu h}{24}$, et l'on aura pour l'heure précise du passage au méridien de Paris, $h-\frac{\nu h}{24}$.

Ajoutant à cette quantité, la correction de la distance de l'équinoxe au soleil, eu égard à la différence des méridiens, puisque Porto-Ferraio est à l'est; c'est-à-dire ajoutant $+\frac{\delta\nu}{24}$, l'heure vraie du passage au méridien de cette ville sera $h-\frac{\nu h}{24}+\frac{\delta\nu}{24}$.

Ce résultat pouvant se mettre sous la forme

$$h-\frac{(h-\delta)\nu}{24},$$

on reconnaît sur-le-champ qu'il donne lieu au second procédé.

CHAPITRE III.

De la réfraction astronomique.

118. Il est naturel de penser que les rayons de lumière qui viennent des astres suivent rigoureusement une ligne droite, en traversant l'espace immense dans lequel roulent les corps célestes; mais une fois arrivés à l'atmosphère, ils se meuvent dans des milieux de différente densité, et doivent pour cette raison être soumis aux mêmes lois que les rayons lumineux qui sont lancés près de la surface de la terre. Il s'ensuit donc que les astres paraissent plus élevés qu'ils ne sont réellement, ou ce qui revient au même, que la *distance vraie* du centre d'un astre, au zénith, est égale à sa *distance apparente* augmentée de la réfraction. FIG. 35

On a reconnu par un grand nombre d'expériences, que la réfraction diminue depuis l'horizon jusqu'au zénith où elle est nulle; qu'elle dépend de l'état du baromètre et du thermomètre dans le lieu de l'observateur, et qu'au-delà de 10° de hauteur elle est à très-peu-près proportionnelle à la tangente de la distance apparente de l'astre au zénith, moins quatre fois la réfraction.

La plupart des astronomes donnent la préférence aux tables de réfractions de Bradley, que Delambre a, depuis peu d'années, calculé de nouveau avec plus d'exactitude, et dans l'hypothèse que l'état moyen de l'atmosphère répond à 12°,5 du thermomètre centigrade (10° du thermomètre de Réaumur), et à 76 centimètres (28 pouces) du baromètre décimal. Malgré que ces tables, relatives aux hauteurs apparentes, soient imprimées dans la *Connaissance des Temps* de chaque année, nous en avons donné d'analogues à la fin du livre V: on y trouvera aussi celles des réfractions moyennes pour les distances vraies au zénith, parcequ'elles sont utiles dans le calcul des observations azimuthales; elles sont accompa-

gnées des tables de correction pour les différentes hauteurs du baromètre et du thermomètre. Voici le moyen de faire usage de ces dernières tables.

On a observé une étoile à 43° de distance au zénith, au moment où le baromètre marquait 28$^{pouc.}$ 6$^{lig.}$, et le thermomètre de Réaumur + 9° : on demande la correction qui doit affecter la réfraction moyenne.

La hauteur apparente de l'étoile étant de 47°, la réfraction moyenne pour cette hauteur est de 0.'52,"8 (*Connaissance des Temps*);

on trouve ensuite, Table XI, que pour 28$^{po.}$ 6$^{li.}$,
la quantité.................................... $x = +0{,}0179$,
et que pour + 9° du thermomètre............. $y = +0{,}0055$.

Ainsi la fonction $(x + y + xy)$, qui est le facteur par lequel il faut multiplier la réfraction moyenne, = + 0,0235 (*Voyez* aussi l'usage des Tables).

Donc la correction de température............. $dr = + 1'',24$
Donc la réfraction absolue ou actuelle.......... $r = 0'.54'',04$
Donc enfin la distance vraie de l'étoile au zénith, = 43°.0'.54".04

Voici le résumé de ce calcul.

Distance apparente................		43°.0'. 0"
Réfraction moyenne pour cette distance + 0'.52",80	} +	0 .0 .54 ,04
Correction de température........... + 1 ,24		
Distance vrale....................		43°.0'.54",04

Il faut toujours prendre, dans ce calcul, la correction de température avec le signe que donnent les Tables, parceque la distance vraie est, comme nous l'avons déjà dit, égale à la distance apparente augmentée de la réfraction actuelle (*).

Quant à la théorie complète des réfractions, voyez l'ouvrage cité, à la page 229.

(*) La Table X des Réfractions pour les distances apparentes au zénith, donne sur-le-champ la réfraction vraie. Cette Table a été calculée à l'Observatoire, sur les nouvelles formules de *Laplace*, et vient de m'être communiquée par *Bouvard*.

CHAPITRE IV.

De la parallaxe des astres.

119. L'ANGLE sous lequel on verrait du centre d'un astre le rayon de la terre, se nomme la *parallaxe* de cet astre; ainsi pour un observateur placé en A sur la surface du globe, la parallaxe du soleil S est l'angle ASC. Il est évident, à la seule inspection de la figure, que la parallaxe diminue à mesure que l'astre s'élève, et qu'elle est nulle quand il arrive au zénith: il est donc important de la connaître pour différentes hauteurs et pour différens temps de l'année. On voit en outre que les étoiles qui sont toutes à une distance énorme de la terre, n'ont pas de parallaxe sensible. (On trouvera une Table de la parallaxe du soleil à la fin de cet Ouvrage). FIG. 41

Maintenant pour montrer comment on doit tenir compte de la parallaxe dans les calculs astronomiques, soit S le lieu vrai et S' le lieu apparent du centre du soleil, $z = ZCS$ sa distance vraie au zénith, telle qu'elle serait prise du centre de la terre; $r = S'AS$ la réfraction moyenne corrigée de la température, et p la parallaxe ASC de l'astre S.

Cela posé, la distance apparente au zénith, observée du point A, ou l'angle $ZAS' = z - r + p$; car d'abord

$$ZAS = ZCS + ASC = z + p;$$

mais parceque la réfraction élève les objets, ou, ce qui est de même, diminue leur distance au zénith, on a ensuite

$$ZAS' = ZCS' - AS'C = ZCS - S'CS - AS'C,$$

ou à cause de $S' = S$ et de $S'AS = S'CS$, du moins à très-peu-près,

$$Z = z - r + p,$$

ou bien

$$z = Z + r - p.$$

Ainsi 1°. la distance apparente au zénith, observée à la surface de la terre, est égale à la distance vraie prise du centre, diminuée de la réfraction et augmentée de la parallaxe.

2°. La distance vraie prise du centre de la terre est au contraire égale à la distance apparente observée à la surface, augmentée de la réfraction et diminuée de la parallaxe. L'effet de la parallaxe est donc d'abaisser les astres dans leurs verticaux respectifs.

Nous prévenons une fois pour toutes, que dans le calcul de la position des astres, on fait toujours usage des triangles sphériques, dont les côtés sont des arcs de grands cercles de la sphère céleste : ainsi en pareille circonstance on doit employer pour distance vraie d'un astre au zénith, celle qui serait prise du centre de la terre. Mais quand il s'agit d'une étoile, il n'y a plus de différence sensible entre les angles ZAS' et ZCS', c'est-à-dire entre les angles qui seraient mesurés à la surface de la terre, et ceux qui seraient observés au centre.

LIVRE

LIVRE V.

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

Manière de déterminer la marche d'une pendule par rapport au soleil et aux étoiles.

Première Méthode, par les hauteurs correspondantes du soleil.

120. En supposant que le soleil décrive perpétuellement le même parallèle, et que les circonstances de son cours soient les mêmes après comme avant midi, on aura de la manière suivante l'heure que marque une pendule au moment où cet astre passe au méridien du lieu de l'observation.

Observez le temps où l'un des bords du soleil se trouve à une certaine hauteur apparente vers l'est, ainsi que le temps où le même bord arrive à la même hauteur vers l'ouest; le milieu entre ces deux temps sera l'heure que la pendule marquait lorsque le centre du soleil passait au méridien. Si, par exemple, le bord inférieur du soleil était vu le matin à la hauteur de 20^{d}, lorsque la pendule marque $8^{h}.46'.58''$, et que le même bord fût apperçu le soir à la même hauteur, pendant que la pendule marque $5^{h}.0'.3''$,

l'instant du midi vrai serait annoncé par cette pendule, à 11ʰ.53′.30″,5, moitié de 8ʰ.46′.58″ + 15ʰ.0′.3″.

On ne peut se dispenser de répéter cette opération au moins huit à dix fois le matin, et autant le soir; afin que le milieu pris entre tous les résultats, donne le plus exactement qu'il est possible, l'instant du midi.

Quand on prend plusieurs hauteurs le matin, il est indispensable d'en tenir note, afin de pouvoir remettre, le soir, la lunette supérieure dans les mêmes positions qu'elle avait avant midi; en commençant toutefois dans un ordre inverse, comme cela est évident.

C'est de cette manière que nous prîmes, à l'île d'Elbe, des hauteurs correspondantes du soleil, les 29, 30 ventose et 1ᵉʳ germinal an 11. Voici la série des seules observations que nous pûmes faire le 29.

Le matin,

à la hauteur apparente H', la pendule marquait	8ʰ.48′.15″
H''....................	8.51.28
H'''....................	8.55.53
Somme des temps du matin......	26ʰ.35′.36″

Le soir,

à la hauteur apparente H''', la pendule marquait	14ʰ.53′.37″
H''....................	14.58.1
H'....................	15.1.15″
Somme des temps du soir..........	44ʰ.52′.53″
celle du matin étant............	26.35.36
le milieu entre ces deux sommes, ou le 6ᵉ =	11ʰ.54′.44″,83

Ainsi le centre du soleil passa au méridien à 11ʰ54′.44″,83, à très-peu près, en temps de la pendule.

C'est ordinairement avec un quart de cercle astronomique que l'on observe les hauteurs correspondantes des astres; mais le cercle répétiteur peut très-bien servir au même usage. Pour cet

effet l'on fixe à zéro la lunette supérieure, et après avoir visé avec cette lunette un objet éloigné, on dirige l'axe optique de la lunette inférieure vers le même objet; ensuite on dispose le limbe de l'instrument dans le vertical de l'astre, de manière que la bulle d'air du grand niveau soit exactement au milieu du tube. Dans cette position la lunette inférieure est horizontale; ainsi la lunette supérieure rendue mobile et amenée sur l'astre, parcourra sur le limbe, un arc qui sera la mesure de l'anglo de hauteur de cet astre au-dessus de l'horizon.

Nous venons de faire connaître le résultat assez exact de nos observations du 29 ventose; et nous nous assurâmes de même par un grand nombre de hauteurs correspondantes prises les jours suivans, et dans des circonstances plus favorables, que durant la présence du soleil dans le méridien, la pendule marquait $11^h,54'.7''$ le 30 ventose, et $11^h.53'.30'',88$ le 1er germinal: mais ces résultats ne donnent pas encore l'instant précis du midi vrai compté à la pendule, parceque le cours du soleil n'est pas tel que nous l'avons supposé d'abord. Il importe donc de faire connaître la correction qu'il s'agit d'employer en pareil cas.

Recherche de la correction à faire à l'heure déterminée par les hauteurs correspondantes du soleil.

121. Lorsque le soleil s'avance dans les signes septentrionaux, par exemple, sa déclinaison est plus grande le soir que le matin, (art. 4); parconséquent si on l'a observé à 20gr de hauteur avant midi, l'angle horaire correspondant était plus petit que celui qui a eu lieu le soir à la même hauteur. D'où il suit que si ce dernier angle surpassait le premier de $20''$, leur demi-différence $10''$ serait ce qu'il faudrait ôter du milieu pris entre les temps des hauteurs égales, pour avoir le midi vrai.

En effet, désignons par P l'angle horaire du matin, et par $P+\delta$ l'angle horaire du soir, lorsque le soleil est descendu à la même hauteur. Le milieu m entre ces deux quantités sera $m=P+\frac{\delta}{2}$; donc $P=P+\frac{\delta}{2}-\frac{\delta}{2}=m-\frac{\delta}{2}$.

Cela posé, soit Z la distance du soleil au zénith, et qu'il est inutile de connaître, pourvu qu'elle soit la même avant comme après midi; A la distaoce du pôle au zénith, ou le complément de la latitude L; B le complément de la déclinaison D du soleil, ou sa distance au pôle; P l'angle horaire du matin, c'est-à-dire lors de la première observation.

Soieot de même Z, B', P' les valeurs respectives de ces quantités lors de la deuxième observatioo. Avant midi, le triangle ZPS donnera

$$\cos Z = \cos A \cos B + \sin A \sin B \cos P. \qquad (a)$$

Après midi, le triangle $ZP'S'$ donnera

$$\cos Z = \cos A \cos B' + \sin A \sin B' \cos P'. \qquad (b)$$

Mais dans le cas des hauteurs correspondaotes du soleil, B' et P' diffèrent très-peu de B et de P; faisant donc $B - B' = dB$ et $P - P' = dP$, (B étant supposé plus grand que B'), on aura

$$\cos B' = \cos(B - dB) = \cos B + dB \sin B$$
$$\sin B' = \sin(B - dB) = \sin B - dB \cos B$$
$$\cos P' = \cos(P - dP) = \cos P + dP \sin P$$

Aiosi l'équation (b) devieodra, par le moyen de ces valeurs, et en négligeant les quantités du deuxième ordre,

$$\cos D = \cos A \cos B + dB \sin B \cos A + \sin A \sin B \cos P$$
$$- dB \sin A \cos B \cos P + dP \,\text{sio}\, A \sin B \sin P;$$

de celle-ci soustrayaot l'équation (a), le reste sera

$$dP \,\text{sio}\, A \sin B \sin P = - dB (\sin B \cos A - \sin A \cos B \cos P);$$

d'où

$$dP = - dB \left(\frac{\cot A}{\sin P} - \cot B \cot P\right).$$

La variation dB étant exprimée en degrés de l'équateur dans la formule précédente, il coovient de la convertir en temps, à raison de 15° par heure; il faudra donc diviser dB par 15, et alors la correction cherchée sera réduite en secondes de temps, par la formule

$$\frac{dP}{2} = -\frac{dB''}{30}\left(\frac{\tang L}{\sin P} - \cot P \tang D\right) \dots\dots\dots (1)$$

Dans celle-ci, dB'' a été considérée originairement comme positive, parceque le changement en déclinaison est supposé se faire du côté du nord; et en effet $B > B'$ par hypothèse. Mais lorsque ce changement a lieu du côté du pôle austral, dB est négatif, et l'on a

$$\frac{dP}{2} = \frac{dB''}{30}\left(\frac{\tang L}{\sin P} - \cot P \tang D\right) \dots\dots\dots (2)$$

Dans aucun cas, il ne peut y avoir d'incertitude sur le signe de la correction $\frac{dP}{2}$; pourvu que l'on prenne négativement tang L et tang D pour l'hémisphère austral, ainsi que cot P, si P est plus grand que 90° ou 6 heures.

Application de la formule précédente.

Les hauteurs correspondantes prises le 29 ventose an 11, à Porto-Ferraio, dont la latitude $= 42°.49'.6''$, ayant été observée vers $8^h.51'.52''$ du matin et $2^h.57'.38''$ du soir, il s'est écoulé $6^h.5'.46''$ entre les temps moyens des observations du matin et du soir : or comme ce jour-là le changement en déclinaison pour 24^h était de $23'.42''$, on aura celui qui répond à $6^h.5'.46''$, ou seulement à $6^h.5'$, au moyen de cette proportion

$$24^h : 6^h.5' :: 23'.42'' : x = 360'',4;$$

ainsi la variation en déclinaison ou $dB'' = 360'',4$, et elle est positive, parceque le soleil s'avance vers le nord.

De plus, l'angle horaire qui répond à la différence de $8^h.51'.52''$ à $11^h.54'.44'',83$, c'est-à-dire, à $3^h.2'.52'',83$, est assez exactement de $45°.43'.12'',45$, à raison de une heure par 15°; et cela est évident, puisque cet angle dépend du temps qui s'est écoulé depuis la première observation jusqu'au moment du midi vrai.

Cela posé, on procédera au calcul de la formule (1), ainsi qu'il suit :

$L.\ \text{tang}\, L\, (42^\circ.49'.\ 6'')$	$= 9{,}96689$	$-\cot P$	$= -9{,}98909$
Comp. log sin $P\, (45^\circ.43'.12'')$	$= 0{,}14513$	$-\text{tang}\, D\, (28'.42'',8)$	$= -7{,}92187$
	$+0{,}11202$		$+7{,}91096$
	$= 1{,}2943$		$= 0{,}0081$
	$0{,}0081$		
	$1{,}3024.$		

Il suit de là que $\left(\frac{\text{tang}\, L}{\sin P} - \cot P\, \text{tang}\, D\right) = 1{,}3024$, et parconséquent que

$$\frac{dP}{2} = -\frac{360'',4}{30} \times 1{,}3024 = 12{,}013 \times 1{,}3024 = -15'',64.$$

Ainsi, puisque l'heure trouvée par un milieu entre les temps des hauteurs correspondantes du 29 ventose..... $= 11^h.54'.44'',83$
et que la correction........................ $= -\quad 15,64$
l'instant du midi vrai était donné par la pendule, à $\quad 11^h.54'.29'',19$

et parconséquent cette pendule était en retard, ce jour-là, de $0^h.5'.30'',81$ sur le midi vrai.

Cherchons, par la même méthode, les corrections pour le 30 ventose et le 1[er] germinal an 11.

Le 30 ventose, le milieu entre les 16 temps a donné, pour le midi compté à la pendule, $11^h.54'.7''$, et l'intervalle moyen entre les observations du matin et celles du soir était de $5^h.24'.40''$; ainsi le changement en déclinaison pour ce temps, $= dB'' = 319'',9$, à raison de $23'.42''$ par 24 heures.

L'angle horaire $P = 40^\circ.13' = 2^h.40'.52''$,

et au moment de la première observation la déclinaison australe du soleil, ou $D = 0^\circ.41'.37'',6$.

La latitude $L = 42^\circ.49'.6''$.

$$\log \tan L = 9{,}96689 \qquad - \cot P = 0{,}07285$$
$$C.\log \sin P = 0{,}18998 \qquad - \tan D = 7{,}12805$$
$$+0{,}15687 = 1{,}4351 \qquad +7{,}20090 = 0{,}0016$$
$$+0{,}0016$$
$$1{,}4367$$

donc $\frac{dP}{2} = -15'',31$; donc enfin le midi vrai, compté à la pendule, $= 11^h.53'.51'',69$, et cette pendule retardoit sur le midi vrai, de $0^h.6'.8'',31$.

Le 1[er] germinal, le milieu entre les 14 temps a donné pour le midi approché, $11^h.53'.30'',88$; et l'intervalle moyen entre les observations du matin et celles du soir était de $5^h.40'.10''$; d'où il suit que le changement en déclinaison pour ce temps, ou $dB'' = 335'',5$, à raison de $23'.41''$ par 24 heures.

D'un autre côté, l'angle horaire $P = 42^\circ.31' = 2^h.50'.4''$.
La déclinaison boréale du soleil, $D = 0^\circ.18'.53'',7$,
et la latitude................ $L = 42^\circ.49'.6''$.

$$\log \tan L = 9{,}96689 \qquad - \cot P = 0{,}03769$$
$$C.\log \sin P = 0{,}17017 \qquad + \tan D = 7{,}73981$$
$$0{,}13706 = 1{,}3711 \qquad -7{,}77750 = -0{,}006$$
$$-0{,}0060$$
$$1{,}3651$$

ainsi $\frac{dP}{2} = -15'',26$, et parconséquent l'instant précis du midi était, en temps de la pendule, à $11^h.53'.15'',62$; elle était donc en retard, de $0^h.6'.44'',38$.

122. Il reste maintenant à déterminer la marche de la pendule, par rapport au temps moyen (art. 5). Pour cet effet, on calculera le temps moyen au midi vrai à Porto-Ferraio, pour les 29, 30 ventose et 1[er] germinal, et l'on en déduira facilement l'avance ou le retard de la pendule sur le temps moyen. Ensuite la différence de ces deux avances ou retards sera la marche de la pendule : c'est ce que le calcul suivant fera connaître.

Le 29 ventose an 11 à midi, à Porto-Ferraio, répond, comme nous l'avons vu, à $23^{h}.28'.2'',3$, le 28 à Paris, *temps astronomique.*

Or le temps moyen au midi vrai, le 28 à midi à Paris	$= 0^{h}.8'.11'',5$
et le temps moyen au midi vrai, le 29.........	$= 0.7.53,5$
donc la différence en 24 heures......	$= -0^{h}.0'.18'',0$

Donc, pour le 29 vent. à midi, à Porto-Ferraio, ou pour le 28, à Paris, à.....		$11^{h}.28'.2'',3$ du matin, temps civil.
le temps moyen, au midi vrai, ...	=	$0.7.53,9$
et puisque le midi vrai à la pendule était ce jour-là, à........................		$11.54.29,19$
il s'ensuit que la pendule retardait sur le temps moyen, de....................		$0^{h}.13'.24'',71$ (*).

Le 30 ventose an 11 à midi, à Porto-Ferraio, était le 29 ventose à Paris, à $23^{h}.28'.2'',3$, temps astronomique,

le temps moyen au midi vrai, le 29 vent., à Paris, ...	=	$0^{h}.7'.53'',5$
le temps moyen au midi vrai, le 30.....	=	$0.7.35,4$
Différence en 24 heures.......	—	$0^{h}.0'.18'',1$

Donc pour le 29 ventose, à Paris, à..		$11^{h}.28'.2'',3$ du matin.
le temps moyen au midi vrai...........	=	$0.7.35,8$
et comme la pendule marquait au midi vrai		$11.53.51,69$
son retard sur le temps moyen était de...		$0^{h}.13'.44'',11$

Le 1er germinal an 11 à midi, à l'île d'Elbe, répond au 30 ventose à Paris, à $23^{h}.28'.2'',3$.

(*) On trouverait encore le même résultat de la manière suivante.

Le 29 à midi, à Porto-Ferraio, la pendule retardait sur le midi vrai, de	$0^{h}.5'.30'',81$
Et le temps moyen avançait sur le midi vrai, de.............	$0.7.53,9$
Donc la pendule était en retard sur le temps moyen, de...	$0^{h}.13'.24'',71$

Le

Le temps moyen au midi apparent, le 30 ventose, à Paris, ...	=	$0^h. 7'.35'', 4$
Le temps moyen au midi apparent, le 1er germinal, ...	=	$0 . 7 .17 , 2$
Différence en 24 heures........	—	$0^h. 0'.18'', 2$
Ainsi le 1er germinal an 11, à Porto-Ferraio, ou le 30 ventose à Paris, à....		$11^h.28'. 2'',3$ du matin.
le temps moyen au midi vrai.........	=	$0 . 7 .17 ,6$
et comme la pendule marquait à midi vrai		$11 .53 .15 ,62$
il s'ensuit qu'elle retardait sur le temps moyen, de..........................		$0^h.14'. 1'',98$

S'il eût été possible de multiplier davantage les observations du 29 ventose, nous pourrions conclure que la pendule retardait exactement sur le temps moyen, de $13'.44'',11 - 13'.24'',71 = 19'',4$, dans l'intervalle d'un midi vrai à l'autre; mais aucune cause n'ayant troublé sensiblement les observations des 30 ventose et 1er germinal, nous pensons que ce retard est plutôt de $14'.1'',98 - 13'.44'',11 = 17'',87$, ou simplement de 18″ dans l'espace de $23^h.59'.41'',8$, *temps moyen*. Cependant il n'y aurait aucun inconvénient à prendre un milieu entre ces deux résultats. En général, il est important de faire une longue suite d'observations de ce genre, pour déterminer avec précision la marche de la pendule, parceque le temps est un des élémens les plus essentiels du calcul des azimuths, des latitudes, etc....

Maintenant, faisons voir comment on trouve l'heure par les hauteurs absolues du soleil.

Deuxième méthode, par les hauteurs absolues du soleil.

123. Ce n'est ordinairement que quand l'atmosphère se maintient dans un état de pureté, que l'on est sûr du succès de la méthode précédente; mais cette circonstance étant quelquefois rare, il vaut mieux, pour déterminer l'heure, mesurer uniquement avec le cercle répétiteur la distance du centre du soleil au zénith, avant ou après midi. Pour ne pas être obligé d'avoir égard à son demi-diamètre

apparent, on observe alternativement le contact des bords supérieur et inférieur de cet astre avec le fil horizontal de la lunette, de manière que le fil vertical passe le plus près possible du centre de l'astre.

Supposons, par exemple, qu'après six observations conjuguées faites le 11 germinal an 12 (1er *avril* 1804), à 43°.17′ de latitude nord, et par 40°.15′ de longitude occidentale, l'arc parcouru par la lunette supérieure du cercle soit de 462^{gr}; le sixième de cet arc, $=77^{gr}$, sera la mesure de la distance apparente du centre du soleil au zénith. Supposons, de plus, que le milieu entre les six temps donnés par la pendule soit de $4^h.12'.10''$.

On sait que la distance vraie d'un astre au zénith est égale à sa distance apparente, plus la réfraction, moins la parallaxe (art. 119) : or la distance apparente du centre du soleil au zénith, réduite en degrés sexagésimaux, est, dans cette circonstance, ... 69°.18′

La réfraction moyenne corrigée de la température, par le procédé de l'art. 118, est supposée de	2′.30″	+ 0. 2.22″,05
La parallaxe du soleil, pour le 11 germinal, et à 20°.½ de hauteur, est	— 7,95	
Donc la distance vraie du centre du soleil au zénith est		= 69°.20′.22″,05

On calculera ensuite, par la méthode de l'art. 114, la déclinaison du soleil pour le jour, l'heure et le lieu de l'observation.

Déclinaison du soleil pour le 11 germinal an 12 à midi, à Paris..................................	4°.34′.25″
Déclinaison pour le 12.......................	4 .57 .30
Changement en déclinaison, pour 24 heures.......	0°.23′.15″

Le 11 germinal, à $4^h.12'.10''$ du soir, par 40°.15′ de longitude occidentale, répond au 11 germinal à $6^h.53'.10''$ comptées à Paris; ainsi la partie proportionnelle pour ce temps. = 6′.40″,2

Ajoutant la déclinaison du 11 germinal, on aura pour la déclinaison boréale cherchée............ 4°.41′. 5″,2

Cela posé, dans le triangle sphérique PZS on connait, 1°. ZP, FIG. 44 ou le complément de la latitude; 2°. ZS, ou la distance vraie du centre du soleil au zénith; 3°. enfin PS = la distance de l'astre au pôle, ou le complément de sa déclinaison.

L'angle horaire P s'obtiendra donc par la formule de l'art. 25.

Calcul de l'angle horaire.

Distance vraie du centre du soleil au zénith	= 69°. 20'. 22",05		
Complément de la latitude.	= 46 . 43.	. . . C.sin =	0,1378852
Complément de la déclinaison	= 85 . 18 . 54 ,80. . .	C.sin =	0,0014534
Somme.	201°. 22'. 16",85		
½ somme.	100 . 41 . 8 ,42		
½ som. — comp. latitude.	53 . 58 . 8 ,42.	sin =	9,9077869
½ som. — comp. déclinaison. . . .	15 . 22 . 13 ,62.	sin =	9,4233423
			19,4704678
		log sin ½ P =	9,7352339
		ainsi ½ P. . =	32°. 55'. 30",5

L'angle horaire ZPS est donc de 65°. 51'. 1" = 4h. 23'. 24",06 temps vrai.
mais la pendule marquait. . . . . 4 . 12 . 10

Donc au moment de l'observation, elle
retardait sur le soleil, de. . . . . 0h. 11'. 14",06.

Maintenant, voici le calcul qu'il faut effectuer pour connaître la marche de la pendule par rapport au temps moyen.

L'heure vraie ou apparente pour le méridien et le moment de l'observation, était à. . . . . 4h. 23'. 24",06

Ajoutant la différence des méridiens. . . . . 2 . 41

on a l'heure vraie que l'on comptait à Paris au même instant, le 11 germinal an 12. . . . . 7h. 4'. 24",06

Le temps moyen au midi vr. le 11 germ. an 12, à Paris, 0h. 3'. 57", 2
Le temps moyen, *idem*, pour le 12, ... 0 . 3 . 38 , 8

Différence en 24 heures. . . . . — 18", 4

Ainsi pour le 11 germinal an 12, à $7^h.4'.24'',06$ du soir, le temps moyen au midi vrai est..................	$0^h.\ 3'.51'',80$
Ajoutant l'heure de Paris, temps vrai,........	$7\ .\ 4\ .24\ ,06$
on a l'heure de Paris, temps moyen, au moment de l'observation,..................................	$7^h.\ 8'.15'',86$
(Si cette somme surpassait 12^h, on en ôterait 12 pour avoir le temps moyen).	
mais la pendule marquait......................	$4\ .12\ .10$
donc elle retardait sur le temps moyen, compté à Paris, de..	$2^h.56'.\ 5'',86$

Après avoir pareillement calculé l'heure vraie, à l'aide des hauteurs absolues du soleil, prises dans le même lieu à une autre époque, on déterminera comme ci-dessus l'avance ou le retard de la pendule, par rapport au temps moyen; et de là on en conclura aisément l'avance ou le retard, dans l'intervalle de ces mêmes observations. Divisant ensuite ce dernier résultat par le nombre des heures moyennes qui se sont écoulées depuis une époque jusqu'à l'autre, le quotient sera la quantité dont la pendule avance ou retarde par heure, sur le temps moyen. On voit présentement ce qu'il faut faire pour régler la pendule sur le moyen mouvement du soleil, afin de la rendre utile aux usages de la société; mais en astronomie, il n'est pas absolument nécessaire qu'elle soit réglée ainsi; il suffit au contraire que l'on sache exactement de combien elle avance ou retarde sur le temps apparent, ou sur le temps moyen, ou enfin sur le temps sydéral. C'est ce que confirmeront les exemples de calculs astronomiques que nous donnerons par la suite.

Troisième méthode, par l'observation des étoiles.

124. La marche de l'horloge, relativement au premier mobile, ou aux étoiles, dont les retours aux méridiens sont égaux, se détermine de la même manière que par rapport au soleil. Si, par exemple, on observe, à la même hauteur, sur l'horizon, une étoile fixe, avant ou après son passage au méridien, le milieu entre les temps des deux observations sera l'heure que l'hor-

loge marquait à l'instant du passage; et si le lendemain on observe encore cette étoile, on saura à quelle heure elle se sera retrouvée dans le méridien; parconséquent on connaîtra si l'horloge suit exactement le mouvement diurne du ciel, ou de combien elle avance ou retarde en 24 heures sydérales. Dans ce dernier cas, on abaissera ou l'on élevera, par estime, la lentille du pendule, afin de faire retarder ou avancer l'horloge; et l'on s'assurera par d'autres hauteurs correspondantes, prises à différentes époques, s'il est encore nécessaire de changer la durée des oscillations du pendule.

Il convient, pour faire usage de la méthode d'observation actuelle, de choisir une des étoiles qui passent au méridien pendant la nuit, et c'est de quoi l'on s'assure en calculant l'heure approchée de ce passage, comme nous l'avons enseigné art. 115. Il faut aussi, pour que l'étoile paraisse animée d'un mouvement fort sensible, qu'elle soit observée loin du méridien et dans le voisinage du premier vertical; pourvu toutefois qu'elle soit un peu élevée au-dessus de l'horizon, afin d'éviter les erreurs qui pourraient résulter des variations de la réfraction dans les basses régions de l'atmosphère.

On règle encore une horloge sur le temps sydéral, par la méthode des hauteurs absolues d'une étoile : pour cet effet, l'on calcule, comme il est dit à l'art. 123, l'angle horaire de l'étoile, à l'aide de sa déclinaison, de sa distance au zénith et de la latitude du lieu; mais ici la distance vraie au zénith est seulement égale à la distance apparente, plus la réfraction ; puisque la parallaxe est sensiblement nulle.

L'angle horaire de l'étoile étant trouvé, on le convertira en temps, à raison de 15° par heure, et le résultat exprimera des heures sydérales; on saura donc sur-le-champ de combien l'horloge avance ou retarde sur l'étoile, au moment de l'observation.

Supposons, par exemple, qu'un certain jour avant le passage de l'étoile au méridien, l'angle horaire réduit en temps ait donné $2^h.14'.24''$, au moment où la pendule marquait $3^h.15'.30''$: cette pendule avançait donc sur l'étoile, de $1^h.1'.6''$. Supposons encore que le lendemain, après le retour de la même étoile au méri-

dien, l'angle horaire ait été trouvé de $4^h.8'.0''$, lorsque la pendule marquait $5^h.9'$; donc au moment de la seconde observation la pendule n'était en avance que de $1^h.1'$ sur le temps sydéral; donc elle retardait de $6''$ dans l'intervalle de $30^h.22'.24''$, ou de $\frac{2}{10}$ de seconde par heure.

Une horloge réglée sur les fixes, et à laquelle on ferait marquer $0^h.0'.0''$ quand le point équinoxial du printemps entre dans le méridien, donnerait en temps, l'ascension droite de tout astre au moment où il serait au point culminant, c'est-à-dire à sa plus grande élévation au-dessus de l'horizon. Ainsi, en prenant dans la *Connaissance des Temps* le complément à 24 heures de la distance de l'équinoxe au soleil pour un jour proposé, on aura son ascension droite pour ce jour-là, ou ce qui est de même, l'heure que l'on doit compter à midi vrai à Paris, sur l'horloge des étoiles. Il résulte même de cette remarque un moyen très-simple de faire marquer à l'horloge réglée sur les fixes, $0^h.0'.0''$, lorsque l'équinoxe passe au méridien; car si avec une *lunette méridienne* (*) on observe une étoile lors de sa culmination, et que l'on mette en même temps le pendule de l'horloge en mouvement, les aiguilles du cadran étant préalablement fixées sur l'heure donnée par l'ascension droite de l'étoile; cette horloge sera réglée comme on le desirait. L'ascension droite se calcule pour le jour proposé, par la méthode des art. 115 et 116, et se réduit en temps à raison de $15°$ par heure.

Au défaut d'une lunette méridienne on aura recours à la méthode des hauteurs absolues ou correspondantes du soleil ou des étoiles, et par-là on connaîtra la marche de l'horloge. Supposons, dans cette circonstance, que le midi vrai ou apparent arrive un

(*) On appelle *lunette méridienne* ou *instrument des passages*, une lunette assujétie à tourner exactement sur deux points fixes. Pour la disposer dans le plan du méridien, on observe l'étoile polaire au moment de ses passages supérieur et inférieur, et si l'intervalle des temps entre deux passages consécutifs sont parfaitement égaux, la lunette est dans le plan du méridien : dans le cas contraire il y a déviation, et alors on amène l'objectif de la lunette du côté où l'intervalle était le plus grand; après quelques essais de ce genre, faits pendant plusieurs jours, on parviendra à placer exactement la lunette.

certain jour à $10^h.41'.30''$ en temps de l'horloge réglée sur les fixes, et que l'ascension droite du soleil, à cette époque, soit de $6^h.20'.10''$; alors l'horloge aura marqué au moment du midi, $4^h.21'.20''$ de plus que l'ascension droite du soleil. Pour la retarder de cette quantité, on fera marcher un compteur (*) d'accord avec elle; ensuite pendant qu'une personne retiendra les secondes qui s'écoulent, une autre arrêtera le pendule de l'horloge, et fera rétrograder les aiguilles de $4^h.19'.20''$ seulement, afin d'avoir tout le temps de faire cette disposition; et à l'instant où les $120''$ ôtées de $4^h.21'.20''$ expireront sur le compteur, on remettra le pendule en mouvement : par ce moyen la présence du point équinoxial au milieu du ciel sera, à l'avenir, annoncée par l'horloge, à $0^h.0'.0''$, ou ce qui est de même, à 12^h. Néanmoins on ne pourra se dispenser de vérifier de nouveau la marche de l'horloge, lorsqu'il s'agira, par la suite, de faire des observations importantes; d'abord parceque l'ascension droite apparente des étoiles change peu à peu, en vertu du mouvement des équinoxes sur l'écliptique (art. 5), de la nutation et de l'aberration; ensuite parceque la marche de l'horloge pourrait avoir été altérée par quelques causes physiques qui ne se seraient point décelées, ou dont il serait impossible d'évaluer les effets.

125. Les opérations précédentes peuvent être récapitulées et abrégées ainsi qu'il suit :

1°. Pour régler une pendule sur le temps sydéral par le soleil, prenez des hauteurs absolues du soleil trois ou quatre heures avant ou après midi. Calculez l'angle horaire (art. 123); cherchez dans la *Connaissance des Temps* la distance Δ de l'équinoxe du soleil pour l'instant de vos observations; prenez le complément à 24^h de cette distance ; alors le temps sydéral sera

$$(24^h - \Delta \mp H),$$

H étant l'heure de l'observation.

Soit *P* le temps de la pendule pour l'instant de l'observation,

(*) Le *compteur* est une petite pendule qui sonne et marque les secondes seulement ; il est surtout utile quand on est obligé de faire des observations astronomiques un peu loin de l'horloge.

$$(24^h - \Delta \mp H) - P$$

sera la correction de la pendule. Si l'observation est faite avant midi;

le temps sydéral.......................... $= (24^h - \Delta - H)$
et après midi, ce temps.................. $= (24^h - \Delta + H)$.

En répétant les mêmes opérations plusieurs jours de suite, vous saurez si la marche de la pendule est trop lente ou trop rapide.

2°. Par les étoiles; prenez des hauteurs d'une étoile, et calculez l'angle horaire comme ci-dessus, après avoir cherché le déclinaison de l'étoile par le procédé de l'art. 116.

Soit H l'angle horaire trouvé, et A l'ascension droite de l'étoile pour le jour de l'observation, corrigée de l'aberration et de la nutation, art. 116. Cela posé, si les hauteurs ont été prises à l'orient, le temps sydéral............................ $= (A - H)$.

Si au contraire elles ont été prises à l'occident,
le temps sydéral............................ $= (A + H)$.

Soit P le temps de la pendule,

$$(A \mp H) - P$$

sera ce qu'il faut ajouter au temps P.

Ces opérations faites plusieurs jours de suite, montreront si la marche de la pendule est trop lente ou trop rapide; et il est évident que par cette méthode, comme par la précédente, le mouvement de la pendule est comparé à celui du point équinoxial.

Dénomination des principales étoiles, et moyen de les reconnaître.

126. Les méthodes précédentes ainsi que la plupart de celles qui feront l'objet des chapitres suivans, resteraient sans application si l'on n'avait aucune connaissance de la sphère étoilée. Cette connaissance s'acquiert aisément à l'aide de cartes célestes dont les astronomes font usage, et cela en comparant les situations respectives des étoiles qui y sont gravées, avec leurs positions réelles dans

dans le ciel. Cependant, au moyen de la description que nous allons donner, on saura bientôt distinguer, les unes des autres, les étoiles les plus remarquables; et l'on pourra ainsi se passer du secours des cartes astronomiques.

La grande Ourse, vulgairement appelée *le Chariot*, est une constellation de sept étoiles. Suivant l'usage reçu parmi les astronomes, elles sont comme les autres étoiles, désignées par des lettres grecques, ainsi que le représente la Planche VI. La droite menée par β et α, passe très-près d'une étoile assez belle, autour de laquelle toutes les autres qui l'avoisinent semblent tourner. Celle-ci décrit elle-même un fort petit cercle autour du pôle du monde, et est appelée *étoile polaire;* elle est de 3e grandeur, et la principale de la *petite Ourse*, autre constellation à-peu-près semblable à la grande.

La ligne menée par les étoiles ζ et η de la queue de la grande Ourse, et prolongée de 31 degrés environ, passe fort près d'une étoile de la première grandeur, nommée *Arcturus*, ou l'α du *Bouvier.*

La Chèvre est une autre étoile de la première grandeur, située sur la ligne menée par δ et α de la grande Ourse.

La ligne tirée de l'étoile ϵ de la grande Ourse à la polaire, passe de l'autre côté du pôle, au milieu d'une constellation nommée *Cassiopée*, et composée de cinq étoiles principales qui font une espèce de *M* ou de chaise renversée.

On trouve la constellation du *Lion*, en prolongeant de 45° environ vers le midi la droite qui joint α et β de la grande Ourse; elle forme un grand trapèze, à l'un des angles duquel est une étoile de la première grandeur, nommée *Régulus.* La queue du Lion β est une étoile de la deuxième grandeur, située un peu au midi de la ligne tirée de Régulus à Arcturus, et est à 15° de Régulus vers l'orient.

La constellation d'*Orion* est un groupe de plusieurs étoiles rangées suivant l'ordre que présente la figure dessinée dans la Pl. IV: en hiver elle paraît du côté du midi vers les sept à huit heures du soir. Dans l'intérieur du quadrilatère formé des étoiles γ, α, κ, β ou *Rigel*, on remarque trois étoiles en ligne droite, désignées par $\delta\,\epsilon\,\zeta$, et

vulgairement appelées les *trois Rois*, ou selon les astronomes, le *baudrier* d'*Orion* : *Sirius*, l'étoile la plus brillante et la plus scintillante du ciel, est à l'orient du baudrier ; et les *Pleyades* formant un amas de petites étoiles, sont à l'occident en tirant vers le nord.

Aldébaran est une étoile de la première grandeur, située fort près des Pleyades, et sur la ligne menée de l'étoile γ d'Orion aux Pleyades : elle est remarquable par sa grandeur, son éclat et sa couleur rouge.

Procyon, ou *le petit Chien*, est aussi une étoile de la première grandeur, située au nord de Sirius et plus orientale qu'Orion ; elle fait avec Sirius et le baudrier d'Orion un triangle presque équilatéral.

La diagonale $\alpha\gamma$ du quarré de la grande Ourse, prolongée de 68°, passe près d'une étoile de la première grandeur, connue sous le nom de l'*épi de la Vierge.* Cette étoile fait à-peu-près un triangle équilatéral avec Arcturus et la queue du Lion.

La *Lyre* est une des plus brillantes étoiles du ciel, et fait presque un triangle rectangle avec Arcturus et la polaire ; l'angle droit étant vers l'orient, à la Lyre.

Au midi de la Lyre paraît une belle étoile de la seconde grandeur, dans la constellation de l'*Aigle ;* cette étoile est située entre deux autres qui en sont fort proches, et qui forment une ligne droite avec elle.

Le Capricorne est une constellation désignée par le prolongement de la ligne qui passe par la Lyre et par l'Aigle. Deux étoiles de troisième grandeur, α et β, à deux degrés l'une de l'autre, sont placées sur ce prolongement et forment la tête du Capricorne. A 20 degrés plus loin, du côté de l'orient, sont deux autres étoiles γ et δ, situées de l'orient à l'occident et à 2° l'une de l'autre, composant la queue du Capricorne.

En menant une ligne de l'Aigle à la queue du Capricorne, son prolongement de 20° indique *Fomalhaut*, ou *la bouche du poisson austral*, étoile de première grandeur.

Enfin la ligne menée de Régulus à l'épi de la Vierge, et prolongée vers l'orient, rencontre la constellation du *Scorpion*, com-

posée de trois étoiles au front du Scorpion ; et formant un grand arc du nord au sud. L'étoile de la première grandeur, placée plus à l'orient et comme au centre de cet arc, se nomme *Antarès*, ou *le cœur du Scorpion*.

Nous croyons devoir terminer ici ce catalogue ; parceque dans les levés des grandes cartes les ingénieurs ne font usage, le plus souvent, que d'observations du soleil et de l'étoile polaire. Cependant ceux qui voudront une description complète des constellations, pourront consulter le premier Tome de l'Astronomie de Lalande ; ils trouveront d'ailleurs dans cet ouvrage, l'un des plus riches dépôts de la science, tout ce qui concerne la théorie et la pratique des observations astronomiques.

CHAPITRE II.

Observation et calcul des latitudes.

127. La latitude d'un lieu terrestre, ou la hauteur du pôle se détermine par des hauteurs du soleil ou des étoiles; mais on choisit ordinairement, pour faire ces observations, une des étoiles circompolaires; parceque si, pendant une longue nuit, on observe sa plus grande et sa plus petite hauteur, c'est-à-dire ses deux passages au méridien, la demi-somme de ces hauteurs, diminuées chacune de la réfraction, sera la hauteur du pôle cherchée.

La méthode actuelle suppose que l'on a invariablement fixé un quart de cercle dans le plan du méridien, en l'adossant contre une muraille, instrument que l'on nomme pour cette raison un *mural:* mais les ingénieurs-géographes étant obligés d'observer dans des lieux où il serait souvent fort difficile et très-dispendieux de faire établir un pareil instrument, se servent plus commodément du cercle répétiteur, qui a d'ailleurs l'avantage exclusif de donner, par des observations multipliées et dans une seule nuit, la latitude à la précision d'une seconde. A la vérité, les distances au zénith observées avec ce cercle ne sont pas prises dans le plan du méridien; mais on les y réduit par la méthode suivante.

Correction des distances au zénith, observées près du méridien.

FIG. 42. Soit Z le zénith de l'observateur, P le pôle, E l'étoile supposée très-près du méridien ZP; PE sera la distance de l'étoile au pôle, ou le complément de sa déclinaison, ZE sa distance au zénith observée.

Prenons $Pe = PE$, Ze sera la distance au zénith telle qu'elle aurait été observée dans le méridien; et comme pour le cas de la figure, $ZE > Ze$, soit $ZE = Ze + x$.

D'ailleurs,

$$Ze = ZP - PE = (1^q - L) - (1^q - D) = D - L,$$

D étant la déclinaison de l'étoile E, et L la latitude du lieu Z; donc

$$ZE = D - L + x.$$

Le triangle sphérique ZPE donne

$$\cos ZE = \cos PE \cos PZ + \sin PE \sin PZ \cos P,$$

ou

$$\cos(D - L + x) = \sin D \sin L + \cos D \cos L \cos P;$$

mais à cause de $\cos P = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} P$, on aura

$$\cos(D - L + x) = \sin D \sin L + \cos D \cos L - 2 \cos D \cos L \sin^2 \tfrac{1}{2} P.$$

Développant le premier membre par la formule connue, il viendra

$$\cos(D - L) \cos x - \sin(D - L) \sin x = \cos(D - L) - 2 \cos D \cos L \sin^2 \tfrac{1}{2} P.$$

Mettant pour $\cos x$ sa valeur $1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} x$, on aura

$$\cos(D-L) - 2\cos(D-L) \sin^2 \tfrac{1}{2} x - \sin(D-L) \sin x = \cos(D-L) - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} P \cos D \cos L.$$

Enfin réduisant et divisant tout par $\sin(D-L)$, on trouvera

$$\sin x + 2 \cot(D - L) \sin^2 \tfrac{1}{2} x = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} P \cos D \cos L}{\sin(D - L)}.$$

Il est facile de résoudre cette équation par rapport à $\sin x$; mais les deux premiers termes de la série à laquelle on parviendrait étant toujours suffisans, on les obtiendra plus promptement ainsi qu'il suit.

Puisque x est très-petit, on a $\sin \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} \sin x$, et $\sin^2 \frac{1}{2} x = \frac{1}{4} \sin^2 x$; et comme d'après l'équation précédente l'on a à peu de chose près

$$\sin x = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} P \cos D \cos L}{\sin(D - L)},$$

on aura plus exactement

$$\sin x = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D\cos L}{\sin(D-L)} - \frac{1}{2}\cot(D-L)\sin^2 x$$
$$= \frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D\cos L}{\sin(D-L)} - \frac{1}{2}\left(\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D\cos L}{\sin(D-L)}\right)^2\cot(D-L),$$

ou en prenant l'arc pour le sinus et réduisant en secondes, (art. 31),

$$x = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D\cos L}{\sin(D-L)\sin 1''} - \frac{1}{2}\left(\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D\cos L}{\sin(D-L)\sin 1''}\right)^2\cot(D-L)\sin 1'' \ldots\ldots (1)$$

Le second terme se calcule facilement à l'aide du premier, qui le plus souvent suffit.

A la seule inspection de la figure, on voit que la valeur de x, donnée par la formule ci-dessus, se retranche de la distance observée, quand l'étoile passe entre le pôle P et le zénith Z; ainsi l'on a $Ze = ZE - x$. Si au contraire elle passe au-dessous du pôle, la valeur de x conservera les signes qu'elle a plus haut; mais au lieu de $(D-L)$, on mettra $(D+L)$, parcequ'alors $Ze = ZP + PE = 2^q - (D+L)$.

Enfin si l'étoile passe au midi du zénith, auquel cas $Ze = PE - PL = L - D$, il faudra changer les signes de la valeur de x, et mettre $L-D$ à la place de $D-L$: ainsi l'on aurait pour le soleil comme pour une étoile

$$x = -\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D\cos L}{\sin(L-D)\sin 1''} + \frac{1}{2}\left(\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D\cos L}{\sin(L-D)\sin 1''}\right)^2\cot(L-D)\sin 1'' \ldots (2)$$

en ayant cependant le soin de changer le signe de D quand la déclinaison de l'astre est australe.

Soit que l'on ait l'intention de calculer directement la valeur de x, soit que l'on veuille former des tables de réduction pour les étoiles que l'on aura choisies, il faudra connaître à fort peu près la latitude du lieu. Si donc elle ne peut être conclue des opérations géodésiques (art. 79), on considérera les distances au zénith observées à l'orient et à l'occident, et fort près du méridien, comme ayant été prises dans le méridien même, et l'on en conclura la latitude approchée du lieu.

Supposons, par exemple, que l'on sache par la méthode de

l'art. 115, à quelle heure l'étoile polaire passera au méridien un certain jour, et que vers l'instant de ses passages supérieur et inférieur on ait observé ses deux distances au zénith, ainsi que l'état du baromètre et du thermomètre, on aura la latitude approchée ainsi qu'il suit :

	Passage supérieur.	*Passage inférieur.*
Soit, distance apparente au zénith,	$43^{gr},79801$.....	$47^{gr},64250$
Réfr. moyenne corrigée de la tempér.	0 ,01495.....	0 ,01707
on aura, distance vraie, ...	$43^{gr},81296$.....	$47^{gr},65957$
Donc, demi-somme, ou distance vraie du pôle au zénith,		$45^{gr},23626$
donc enfin, complém. de cette demi-somme, ou Latit.,		54 ,76374.

128. Le calcul des tables par la formule donnée plus haut est assez facile; car $\sin^2\frac{1}{2}P$ et $\sin^4\frac{1}{2}P$ étant les seules quantités variables, il s'ensuit que quand on aura le logarithme du premier nombre de la table, les logarithmes de tous les autres nombres s'obtiendront en ajoutant successivement les différences des logarithmes de $\sin^2\frac{1}{2}P$ et $\sin^4\frac{1}{2}P$.

Prenons pour exemple l'étoile polaire qui, comme le dit Delambre, semble mériter la préférence parmi celles que l'on peut choisir pour les observations de la hauteur du pôle. On déterminera d'abord la latitude approchée pour le lieu de l'observateur, par le procédé précédent, et la déclinaison apparente de l'étoile, selon la méthode de l'art. 117. Une erreur de quelques secondes sur chacun de ces élémens n'est d'aucune considération.

Supposons que la latitude $L = 46°.10'.40''$
et que la déclinaison $D = 88\ .13\ .30$

on aura $D - L = 42°.\ 2'.50''$
$D + L = 134\ .24\ .10$...... $45°.35'.50''$.

Ensuite le calcul des facteurs constans de la formule (1) se fera ainsi qu'il suit :

Passage supérieur.		*Passage inférieur.*	
$L.$ 2	0,30103		
$C.$ sin 1″	5,31443		
cos D..........	8,49101		
cos L..........	9,84037		
	3,94684		3,94684
$C.$ sin $(D-L)$...	0,17409	$C.$ sin $(D+L)$......	0,14604
log a... —	4,12093	log a... +	4,09288
2 log a... +	8,24186	2 log a... —	8,18576
$L\frac{1}{2}$......	9,69897		9,69897
$L.$ sin 1″......	4,68557		4,68557
cot $(D-L)$......	0,04484	cot$(D+L)$... —	9,99094
log b... +	2,67124	log b... +	2,56124

Il ne s'agit plus, pour calculer la table de réduction, tant pour le passage supérieur que pour le passage inférieur, que d'ajouter successivement à ces logarithmes constans les différences logarithmiques de $\sin^2\frac{1}{2}P$ et de $\sin^4\frac{1}{2}P$, comme nous l'avons déjà observé, et comme on peut le voir par l'exemple de ces additions, mis à côté de la table XIII, 2e *partie*.

Pour le passage supérieur, la réduction est soustractive; parceque le second terme, quoique positif, est toujours plus faible que le premier, qui, dans le cas actuel, est négatif.

Pour le passage inférieur, le premier terme est positif, et le second l'est aussi; parceque $D+L$ est toujours plus grand que 90°: ainsi la réduction est additive.

Quoique pendant l'observation d'une même étoile, la déclinaison D varie par la précession, l'aberration et la nutation, l'on peut regarder cette déclinaison comme constante, dans l'intervalle de trois à quatre mois; mais après ce temps il faut refaire la table, ou la corriger par les formules que Delambre a données (page 50 de son Mémoire cité).

Ce célèbre astronome, à qui appartient la méthode précédente,

dente ; prescrit de faire pour tout l'intervalle de l'observation d'une même étoile, un tableau qui donne de dix jours en dix jours la position apparente de l'étoile, c'est-à-dire son ascension droite en temps, et sa distance au pôle à-peu-près connue, affectées l'une et l'autre de la précession, de l'aberration et de la nutation, (art. 116). On conçoit en effet qu'avec ce secours le calcul est plus facile et moins sujet à erreur.

On évite des corrections trop fortes, en observant peu de minutes avant et après le passage au méridien.

129. Il n'est pas nécessaire de noter chaque distance au zénith, prise avec le cercle répétiteur, parceque l'on perdrait un temps précieux qu'il convient au contraire d'employer à multiplier les observations autant que possible; mais l'on tient registre des instans des observations données par la pendule (art. 52), afin que la comparaison de ces instans avec l'heure du passage de l'étoile au méridien (art. 117 et page 278) donne les angles horaires P, avec lesquels on cherchera dans la table les réductions correspondantes. La somme de toutes ces réductions, divisée par le nombre des observations, sera la réduction moyenne que l'on retranchera (pour un passage supérieur) de la moyenne entre toutes les distances observées, c'est-à-dire de l'arc total parcouru, divisé par le nombre des observations; le reste sera la distance apparente telle qu'elle aurait été observée au méridien. Ces remarques seront mieux saisies, si l'on jette un coup-d'œil sur le tableau suivant, extrait du Mémoire cité de Delambre. Voici les principales données d'après lesquelles ce tableau a été formé.

Suivant la *Connaissance des Temps* de l'an 5, l'ascension droite moyenne de l'*étoile polaire*, réduite au 1er janvier 1797, $=12^{\circ}.55'.33''$. Variation annuelle, $189''$; et sa déclinaison moyenne $=88^{\circ}.13'.27''$. Variation annuelle, $+19'',6$.

Au 11 décembre 1796, la longitude du soleil $= 8^{s}.20^{\circ}.16'.9''$; et le lieu du nœud de la lune $= 3^{s}.2^{\circ}.10'$.

POLAIRE. *Passage supérieur, 21 frimaire an 5* (11 déc. 1796).

Ascension droite, apparente. . . 0ʰ.51′.55″
La pendule, réglée sur le temps
sydéral, art. 124 et 125, retardait de 0 . 1 . 0
Passage au méridien, en temps de
la pendule . . . . 0ʰ.50′.55″.

ARC PARCOURU réduit en degrés sexagésimaux.	INSTANS des observations donnés par la pendule.	ANGLES HORAIRES en temps.	RÉDUCTION exprimée en secondes de degr. Tab. XIII.
0°. 0′. 0″	0ʰ.37′.49″. . .	. . 0ʰ.13′. 6″. .	. . . . — 10″,78
	42 .53 . . .	. . . . 8 . 2 . .	 4,06
	45 . 8 . . .	. . . . 5 .47 . .	 2,11
	47 . 8 . . .	. . . . 3 .47 . .	 0,91
	48 .39 . . .	. . . . 2 .16 . .	 0,32
	50 .16 . . .	. . . . 0 .39 . .	 0,03
	52 .33 . . .	. . . . 1 .38 . .	 0,16
	54 .39 . . .	. . . . 3 .44 . .	 0,88
	56 .35 . . .	. . . . 5 .40 . .	 2,03
	58 .55 . . .	. . . . 8	 4,03
	61 .18 . . .	. . . . 10 .23 . .	 6,77
504°.24′.19″,62	63 .49 . . .	. . . . 12 .54 . .	 10,46

Somme des réductions.	— 42″,54
qu'il faut diviser par le nombre des observations.	12
Quotient.	— 3″,545
Distance moyenne au zénith, entre les 12 observées.	42°.2′. 1″,635
Distance méridienne, apparente	42°.1′.58″,090
(Art. 118). { Réfraction moyenne.	+ 51 ,020
(Art. 118). { Correction de température.	+ 3 ,570
Distance polaire. . . . . +	1 .46 .22 ,310
Distance vraie du pôle au zénith.	43°.49′.14″,99
Latitude.	46 .10 .45 ,01

Si la pendule était réglée sur le moyen mouvement du soleil, il faudrait, après avoir cherché les angles horaires comme ci-

dessus, les augmenter tous à raison de 10′ par heure, ou de 1′ pour 6′ (art. 5), cette précision sera suffisante; mais pour plus de facilité, on réglera d'avance la pendule sur le temps sydéral, quand on devra observer des étoiles.

On rend la latitude indépendante de l'erreur produite par celle qui pourrait affecter la déclinaison, en observant deux passages de l'étoile; et l'on obtient par ce moyen ses deux distances vraies au zénith, dont la demi-somme est le complément de la latitude (art. 127).

Quand on observe un grand nombre d'étoiles, le calcul des latitudes s'abrège considérablement à l'aide des tables générales que Delambre a données dans la Connaissance des Temps de l'an 12. Nous avons seulement inséré ici deux de ces tables, parcequ'elles suffisent à la rigueur : elles sont comprises sous les numéros XIV et XV, et elles donnent respectivement les facteurs $\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P}{\sin 1''}$ et $\frac{2\sin^4\frac{1}{2}P}{\sin 1''}$ des 1ers et 2e termes de la correction x. Ainsi le calcul sera réduit à celui des autres facteurs

$$\frac{\cos D\cos L}{\sin(D-L)}=F,\quad \text{et}\quad \left(\frac{\cos D\cos L}{\sin(D-L)}\right)^2\cot(D-L)=f$$

dépendans seulement de la déclinaison et de la latitude.

Pour exemple de l'usage de ces Tables, cherchons derechef la réduction précédente, obtenue par une Table particulière. On aura d'abord, en vertu des valeurs de D et de L, et en se conformant aux remarques de la page 89.

$$\begin{aligned}
l.\cos D &= 8{,}49101\\
l.\cos L &= 9{,}84037\\
l.\text{comp.}\sin(D-L) &= 0{,}17409\\
\hline
\log F &= 8{,}50547 \ldots\ldots\ldots\ldots\; 2\log F = 7{,}01094\\
&\qquad\qquad\qquad l.\cot.(D-L) = 0{,}04484\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \log f = 7{,}05578.
\end{aligned}$$

Ensuite on achevera l'opération ainsi qu'il suit :

Angles horaires.	Table XIV.	Table XV.
13′,6″	336″,9	0″,27
8,2	126,7	0,04
5,47	65,7	0,01
3,47	28,1	0,00
2,16	10,1	0,00
0,39	0,8	0,00
1,38	5,2	0,00
3,44	27,4	0,00
5,40	63,0	0,01
8,0	125,7	0,04
10,23	211,6	0,11
12,54	326,7	0,26
	— 1327″,9	+ 0,″74

log 1327,9	3,12317	log 0,74	9,86923
comp. log 12	8,92082		8,92082
log F	8,50547	log f	7,05578
— 3,544	0,54946	+ 0,000	5,84583
		— 3,544	

Réduction = — 3,″544,

c'est-à-dire que vis-à-vis les douze angles horaires, on mettra les 24 nombres que fournissent les Tables XIV et XV ayant ces angles pour argumens. La somme de la première colonne sera — 1327,9, parceque l'on a observé le passage supérieur : cette somme, au contraire, serait positive dans les passages observés au dessous du pôle. Quant à la somme de la 2ᵉ colonne elle est toujours positive, et dans le cas actuel, elle = + 0,74.

Au dessous des logarithmes de ces deux sommes, écrits séparément, on mettra le complément arithmétique du logarithme du nombre des observations, puis les logarithmes de F et de f

calculés ci-dessus. Enfin on fera deux sommes de ces logarithmes, et la réduction sera $= -3'',544 + 0'',000$, c'est-à-dire qu'elle sera réduite à son premier terme, puisque le 2ᵉ est insensible. Ce résultat est, à un millième de seconde près, le même que par la Table particulière, et la méthode qui y conduit est à-la-fois simple et rapide. Si on construisait des Tables sur les facteurs F et f, on abrégerait encore, de beaucoup, la recherche de la réduction dont il s'agit.

Il est essentiel de ne pas pousser trop loin la série des observations, parceque quand la distance de l'astre au zénith est petite et que les angles horaires sont un peu grands, la moindre erreur sur le temps de l'observation influe d'une manière sensible sur la réduction, et parconséquent sur la distance réduite; mais en cessant les observations aussitôt que la réduction s'accroît de $\frac{1}{2}$ ou de $\frac{1}{3}$ de seconde pour une seconde de temps, comme il arrive à quelques minutes du méridien et quand l'astre est fort élevé, on trouve cette réduction avec la plus grande exactitude.

L'illustre astronome dont nous empruntons la méthode, a calculé sur la formule $\sin P = \frac{\sin(L-D)}{15 \cos L \cos D}$ que l'on obtient en différentiant par rapport à P, le premier terme de la valeur de x, une Table qui fait connaître les valeurs de l'angle horaire P, lorsque la réduction varie d'une seconde de degré à chaque seconde de temps; on s'assure, par ce moyen, de la durée que l'on peut donner aux observations. Nous engageons les lecteurs à recourir, pour de plus amples détails sur cet objet, à la Connaissance des Temps de l'an 12, ou au premier nᵒ du Mémorial du dépôt de la guerre.

La série des observations devant être faite dans un intervalle de temps fort court, on trouvera un grand avantage à remarquer sur le cercle azimutal de l'instrument, la direction du vertical de l'étoile que l'on observe, afin de pouvoir amener facilement cette étoile dans le champ de la lunette. On calculera pour cet effet une Table d'azimuth pour différentes déclinaisons et différens angles horaires, et on placera en outre, près du cercle, une ficelle horizontale dans la direction de l'alidade supérieure lorsqu'elle sera pointée sur l'astre; cette ficelle indiquera la hauteur de l'astre durant l'observation.

Reste à faire voir sur quelle formule on pourra établir une Table d'azimuth. Or dans le triangle sphérique ZPE, *fig.* 42, on a (art. 28),

$$\cot Z = \frac{\sin(PZ)\cot(PE)}{\sin P} - \cot P \cos(PZ);$$

mais à cause de $PZ = 1^t - L$, de $PE = 1^t - D$, et de $QZE = 2^t - Z = z$, cette formule se change en

$$\cot z = \cot P \sin L - \frac{\cos L \operatorname{tang} D}{\sin P}:$$

donc si on met au lieu de $\cot z$, sa valeur $\frac{1}{\operatorname{tang} z}$, et qu'on réduise les termes du second membre au même dénominateur, on aura pour l'azimuth z de l'astre, compté du sud,

$$\operatorname{tang.\,azimuth} = \frac{\sec L \sin P \cot D}{\operatorname{tang} L \cos P \cot D \mp 1}.$$

Le signe supérieur étant pour les étoiles qu'on observe au méridien, au dessus de l'équateur et du pôle; et le signe inférieur, pour celles qu'on observe au dessous.

CHAPITRE III.

Discussion de l'erreur commise sur la mesure des distances au zénith, eu égard à la petite inclinaison du cercle.

130. QUELQUE précaution que l'on prenne pour bien disposer verticalement le limbe du cercle, on ne peut éviter une petite déviation qui cause quelquefois deux à trois minutes sexagésimales d'erreur, dans la verticalité de cet instrument ; lorsqu'on observe les distances des astres au zénith.

Soit *OH* l'intersection de l'horizon avec le plan vertical *HZO* ; FIG. 43
soit en outre *HEO* la position du plan du limbe de l'instrument. Les points *Z*, *Z'* étant également éloignés des extrémités de l'horizontale *OH*, l'arc *ZZ'* mesurera l'angle *O*, ou l'inclinaison du plan du limbe sur le plan vertical : alors si *E* est le lieu apparent d'une étoile, sa véritable distance au zénith *Z* sera représentée par l'arc *ZE*, et non par la distance *EZ'* observée sur l'instrument. Connaissant donc l'arc $ZZ' = I$, et $Z'E = D$, on aura l'hypothénuse du triangle sphérique rectangle *ZZ'E* par l'équation

$$\cos ZE = \cos I \cos D, \quad \text{(art. 20)};$$

mais *ZE* ne surpassant *Z'E* que d'une quantité fort petite x; soit $ZE = D + x$, et l'on aura

$$\cos I \cos D = \cos(D + x) = \cos D \cos x - \sin D \sin x:$$

de là

$$\begin{aligned} \sin D \sin x &= \cos D(\cos x - \cos I) \\ &= \cos D(1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}x - 1 + 2\sin^2 \tfrac{1}{2}I) \\ &= 2\cos D(\sin^2 \tfrac{1}{2}I - \sin^2 \tfrac{1}{2}x). \end{aligned}$$

Divisant le premier et le dernier membre par $\sin D$, il vient

$$\sin x = 2\cot D \sin^2 \tfrac{1}{2} I - 2\cot D \sin^2 \tfrac{1}{2} x :$$

or x étant fort petit, on a sensiblement

$$\sin x = 2\cot D \sin^2 \tfrac{1}{2} I\,, \text{ et } \sin^2 \tfrac{1}{2} x = \tfrac{1}{4} \sin^2 x ;$$

partant

$$\sin x = 2\cot D \sin^2 \tfrac{1}{2} I - 2\cot^3 D \sin^4 \tfrac{1}{2} I.$$

Le premier terme du second membre est toujours suffisant, même en supposant I d'un degré; et il est remarquable que plus la quantité D augmente, plus l'erreur x diminue, l'inclinaison I de l'instrument restant toutefois la même. On peut s'assurer, par exemple, que la correction correspondante à 5′ d'inclinaison du cercle, serait de 0″,29 pour l'étoile polaire observée à 37° du zénith, et de 3″ à 4″ environ pour ζ de la grande Ourse et la Chèvre. Il vaut donc mieux dans les observations de latitude, et pour la zône que nous habitons, faire usage des étoiles circompolaires; d'ailleurs, outre que ces observations seront beaucoup plus faciles, l'erreur de la réfraction sera moindre que celle qui résulterait de l'inclinaison du cercle.

Si on désigne par Z, Z' les distances observées et corrigées de la réfraction; et par z, z' les distances vraies d'une étoile circompolaire au zénith, lors des passages supérieur et inférieur; x et x' étant les corrections dues à l'inclinaison du cercle, il est évident que l'on aura

$$z = Z + x,$$
$$z' = Z' + x';$$

donc la distance du pôle au zénith, ou

$$\frac{z'-z}{2} = \frac{Z'+x'}{2} - \frac{Z+x}{2};$$

mais dans le passage inférieur, x' est insensible; donc

$$\text{latitude} = 90^\circ - \frac{z'-z}{2} = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(Z'-Z) + \frac{x}{2};$$

donc enfin la latitude n'est affectée que de la moitié de l'erreur produite par l'inclinaison; ce qui permet de regarder cette erreur comme nulle, surtout si l'on observe l'étoile polaire.

CHAPITRE

CHAPITRE VI.

Détermination des différences de longitudes, à l'aide de l'observation d'un phénomène terrestre instantané, ou par le moyen d'un garde-temps.

131. La position d'un lieu sur la terre dépendant à-la-fois de sa latitude et de sa longitude, il faut, par des moyens quelconques, déterminer ces deux élémens. Il ne nous reste plus rien à dire concernant les observations de latitude; mais il convient de faire connaître deux des méthodes que l'on emploie avec succès, pour déterminer les longitudes terrestres.

C'est surtout de l'observation des éclipses fréquentes des satellites de Jupiter, que les astronomes déduisent la différence des longitudes de deux lieux terrestres, différence qui est celle même des heures que l'on compte sur les méridiens au moment du phénomène; mais lorsqu'il s'agit de déterminer la position respective de deux lieux fort voisins, les bonnes montres marines, ou gardes-temps qui, comme ceux de Berthoud, conservent une marche à très-peu-près uniforme pendant plusieurs mois (*), peuvent être employés de préférence pour cet objet. Si donc, dans un certain lieu, une telle montre était exactement réglée sur le moyen mouvement du soleil, et que dans un autre lieu le midi moyen arrivât à 11 heures comptées sur cette montre, la différence de longitude des méridiens serait d'une heure moyenne ou de 15°, et le second lieu serait évidemment à l'est du premier.

(*) Le mouvement de ces montres est dégagé, en grande partie, de l'influence de la température, au moyen d'un compensateur qui le régularise.

Il n'est pas toujours possible de déterminer l'instant précis du midi, et cela même n'est pas nécessaire, puisque l'on peut trouver le temps vrai pour tout autre moment du jour (art. 123). Supposons en effet qu'après avoir réglé une montre à l'Observatoire de Paris, on ait pris, dans un autre lieu, des hauteurs absolues du soleil avant son passage au méridien, et calculé l'heure vraie, puis le temps moyen de l'observation (art. 123), la différence de ce temps avec l'heure marquée par la montre, lors de l'observation, sera, comme ci-dessus, la différence de longitude des deux méridiens.

L'exemple suivant fixera encore mieux les idées à cet égard.

Le 11 germinal an 12 (1er *avril* 1804), à 43°.17′ de latitude nord, et par 40°.15′ de longitude occidentale estimée, on a trouvé, pour la distance du centre du soleil au zénith, 69°.20′.22″,05, au moment où la montre réglée sur le *temps moyen*, à Paris, marquait 7h.8′.30″,9. A cette même époque la déclinaison du soleil était de 4°.41′.5″,2 (art. 123); il suit de là et de l'article cité, que le temps vrai de l'observation pour le lieu où elle s'est faite était 4h.23′.24″,06. Mais l'on trouve dans *la Connaissance des Temps*, que le 11 germinal an 12, le *temps moyen au midi vrai* égalait 0h.3′.57″,2, et que cette quantité diminuait de 18″,4 en 24 heures; donc, à 4h.23′.24″,06 elle avait diminué de 3″,36, et alors le temps moyen n'était en avance sur le temps vrai, au moment de l'observation, que de 0h.3′.57″,2 — 3″,36 = 0h.3′.53″,84. Cela posé,

Temps moyen compté à Paris, au moment de l'observation	7h. 8′.30″,90
Équation du temps soustractive, parceque le temps moyen est en avance sur le temps vrai...........	— 3.53,84
Temps vrai compté à Paris..................	7h. 4′.37″,06
Temps vrai de l'observation par rapport au méridien du lieu où elle s'est faite................	4.23.24,06
Différence de longitude des méridiens, en temps...	2h.41′.13″,0

Donc, longitude occidentale du lieu de l'observation, par rapport au méridien de Paris....... = 40°.18′.15″.

Cette méthode suppose que l'on connaît déjà, à-peu-près, la différence de longitude cherchée, et il est rare que l'on n'ait pas une donnée satisfaisante à cet égard. D'ailleurs on pourra, dans un premier calcul, employer la déclinaison du soleil pour le jour de l'observation et pour midi, à Paris: dans l'exemple ci-dessus, cette déclinaison boréale $= 4^{\circ}.34'.25''$. Lorsqu'on aura trouvé ainsi la différence de longitude approchée, on recommencera le calcul en faisant, à la déclinaison du soleil, la correction due à cette différence.

Si la montre avait une petite variation diurne, il ne faudrait point négliger d'en tenir compte; et il n'est peut-être pas inutile de remarquer que les différences de longitudes se détermineraient plus commodément par l'observation d'une étoile, si la montre était réglée sur son mouvement (art. 125); surtout si l'intervalle de temps entre les observations était assez court, pour qu'on pût supposer insensibles les effets de la précession, de l'aberration et de la nutation, sur la position apparente de cette étoile (*).

Un phénomène terrestre instantané, qui serait vu de deux lieux différens, suppléerait avec avantage aux phénomènes célestes: or si sur un lieu fort élevé et pendant une nuit sereine, on fait, à diverses reprises, enflammer, en plein air, plusieurs kilogrammes de poudre à canon, et que deux observateurs munis chacun d'une pendule, et placés aux lieux dont ils veulent connaître la différence de longitude, observent les apparitions de ces feux, apparitions qui seront subites, pour de petites comme pour de grandes distances, à cause de la prodigieuse vîtesse avec laquelle la lumière se propage, le milieu des différences entre tous les temps correspondans des deux pendules réglées de la même manière, sera la différence de longitude cherchée. C'est à l'aide de l'une de ces méthodes que l'on fixerait la position respective de deux îles voisines dont on aurait formé la carte, et que l'on ne pourrait lier par des triangles.

(*) On peut voir dans les *Tables trigonométriques* de Callet, ou dans la description du cercle de réflexion, une méthode pour déterminer les longitudes, par les distances de la lune au soleil ou à une étoile.

CHAPITRE V.

Des observations azimuthales et des calculs qui y sont relatifs.

132. Les triangles, qui, par leur enchaînement, déterminent les positions respectives des objets terrestres, seraient orientés si l'on connaissait l'inclinaison de l'un quelconque de leurs côtés sur la méridienne du lieu principal de la carte, parceque de là dériveraient nécessairement les azimuths de tous les autres côtés. Lorsque le pays est découvert, on peut faire placer au loin un signal dans le plan du méridien céleste, par le procédé que nous avons indiqué aux art. 70 et 124. La ligne que l'on imaginera du signal au lieu de l'observateur sera en même temps le premier côté de ligne méridienne; donc, si l'on mesure l'angle entre le sommet de l'un des triangles du rézeau et le signal dont il s'agit, on aura l'azimuth cherché : mais cette méthode, malgré sa simplicité, ne pouvant être mise en pratique que quand la configuration du terrain le permet, et n'étant pas d'ailleurs la plus courte, on a recours aux observations du soleil ou d'une étoile. Voici comme l'on procède à cet égard.

On choisit une station dont la latitude soit exactement connue; et lorsque le soleil est près de l'horizon, on prend sa distance angulaire à un objet terrestre. On calcule ensuite l'azimuth de cet astre pour l'heure vraie de l'observation, et cet azimuth
FIG. 44 fait connaître celui de l'objet. En effet, soit ZP le premier côté de la méridienne terrestre, ou l'intersection du plan du méridien céleste avec l'horizon du lieu Z; soient en outre ZS et ZG, les intersections respectives des verticaux du soleil S et de l'objet G: l'angle GZS étant mesuré, et l'azimuth SZP du soleil étant déduit de l'heure de l'observation, l'inclinaison du côté ZG sur

le méridien PZ sera connue et représentée, dans le cas de la figure, par l'angle GZP.

L'observation du soleil est préférable à celle d'une étoile, parceque quand on prend un azimuth pendant la nuit, il faut établir un feu à l'objet terrestre. Le feu de réverbère produit par des lampes de Quinquet, est un des meilleurs signaux de nuit, et s'apperçoit aisément à plus de 60000 mètres de distance, surtout dans les temps favorables aux observations. On pourra donc faire usage de ces lampes dans le cas même où il s'agirait de relever des angles entre des objets éloignés qui ne pourraient être apperçus distinctement pendant le jour.

Pour avoir un azimuth indépendant des erreurs produites par celles de l'angle mesuré, de la déclinaison de l'astre, de la latitude du lieu et du temps vrai donné par la pendule, il faut qu'il soit le résultat moyen entre d'autres azimuths pris pendant plusieurs jours, et conclus, autant qu'il est possible, de la comparaison du même objet terrestre avec le soleil levant et le soleil couchant. Avant de faire une observation de ce genre, on doit vérifier scrupuleusement la marche de la pendule, parceque le temps, ou l'angle horaire de l'astre, est tellement un des élémens essentiels du calcul, qu'une seconde d'erreur sur le temps vrai en produirait plusieurs sur l'azimuth. Si la pendule est réglée sur le temps solaire moyen (art. 5), on réduira en heure vraie ou apparente celle de l'observation donnée par cette pendule, ainsi qu'il a été expliqué à l'art. 123 : si au contraire on en ignore la marche, on l'évaluera en prenant des hauteurs correspondantes ou absolues du soleil, le jour et le lendemain de l'observation.

Nous ne répéterons point ici ce que nous avons dit à l'art. 52, relativement à la manière d'obtenir l'angle entre l'objet terrestre et le centre du soleil, ainsi que le milieu entre tous les temps des observations faites avec le cercle répétiteur; mais nous remarquerons que le succès dans la recherche actuelle, comme dans toutes les observations astronomiques, dépend aussi de l'habileté des observateurs.

Maintenant soit S le lieu vrai du soleil, S' son lieu apparent, FIG. 44

G le lieu vrai de l'objet terrestre, G' son lieu apparent, Z le zénith de l'observateur, P le pôle du monde, et ZP le méridien céleste.

L'angle $S'ZG'$ sous lequel on voit l'image du soleil, et celle de l'objet est connue, ainsi que la distance apparente ZG' de cet objet au zénith. De plus, l'instant de l'observation conclue de la pendule donne l'angle horaire ZPS de l'astre, et par suite la distance $PS=C$, ou le complément de la déclinaison de l'astre. Enfin on connaît $PZ=H$, complément de la latitude; ainsi le triangle sphérique ZPS donne, pour la distance vraie du soleil au zénith,

$$\cos ZS, \quad \text{ou} \quad \cos B = \cos H \cos C + \sin H \sin C \cos P. \quad (1)$$

Puis, par le principe de l'art. (19) on a, pour l'azimuth du soleil compté depuis le nord,

$$\sin PZS, \quad \text{ou} \quad \sin Z = \frac{\sin P \sin C}{\sin B}; \quad (2)$$

mais à cause que le même sinus appartient à plusieurs angles, on fera mieux, pour n'avoir aucune incertitude sur l'espèce de l'angle Z, d'employer la formule

$$\cot Z = \frac{\cot C \sin H}{\sin P} - \cot P \cos H \quad (3)$$

démontrée à l'art. 28.

Si, comme à l'ordinaire, $r=$ la réfraction et $p=$ la parallaxe de hauteur de l'astre pour le jour de l'observation; la distance apparente du soleil au zénith, rapportée à la surface de la terre et au centre de station, sera (art. 119),

$$ZS', \quad \text{ou} \quad B' = B - r + p;$$

alors dans le triangle sphérique $G'S'Z$, qui appartient à une sphère dont le centre est au lieu de l'observateur, on connaîtra $ZS'=$ distance apparente du soleil au zénith, $S'G'=$ distance observée entre cet astre et l'objet terrestre, et $ZG'=$ distance apparente de cet objet au zénith. Si donc on fait $ZS'=B'$, $S'G'=O$, $ZG'=A$, on réduira à l'horizon l'angle observé O,

par la méthode de l'art. (23) ; c'est-à-dire qu'en faisant

$$R = \frac{A+B'+O}{2} - A, \qquad R' = \frac{A+B'+O}{2} - B',$$

on aura

$$\sin \tfrac{1}{2} G'ZS', \quad \text{ou} \quad \sin \tfrac{1}{2} O' = \sqrt{\frac{\sin R \sin R'}{\sin A \sin B'}}. \qquad (4)$$

Lorsque l'observation azimuthale a été faite à quelque distance du centre de la station, l'angle O' a, lui-même, besoin d'une correction pour être réduit à ce centre. Si, par exemple, FIG. 45
l'instrument était en Z, et que l'on dût réduire l'angle SZM au point F, on y parviendrait par la formule donnée art. 57; et il est remarquable que la correction se réduit à un seul terme, par la raison déjà exposée au même article : ainsi l'on a

$$\frac{r\sin(O'+y)}{D \sin 1''}, \quad \text{ou} \quad -\frac{r \sin y}{G \sin 1''},$$

selon que l'astre est à gauche ou à droite de l'objet terrestre.

Passons maintenant aux applications de la méthode analytique précédente.

Élémens du calcul des observations azimuthales.

133. Le 1er germinal an 11 au matin (22 *mars* 1803), à 2mèt,4 FIG. 45
du *Fanal* de Porto-Ferraio, dont la latitude boréale est de 42°.42'.6", nous avons observé l'angle entre le soleil levant et le signal de *Monte Capane*, situé vers l'ouest; et par un milieu pris entre six observations, cet angle s'est trouvé de 151°.37'.22",8, en même temps que le milieu entre les instans donnés par la pendule était de 18h.30'.42",5, comptées astronomiquement, c'est-à-dire d'un midi à l'autre.

Le baromètre placé près de l'instrument, et à l'ombre, marquait 27pouces.7lig,5, et le thermomètre de Réaumur 10° ⅓.

De plus, la distance de *Monte Capane* au zénith du Fanal = 86°.15'.11",88.

L'angle de direction, ou la distance angulaire de *Monte Capane* au centre du Fanal = 236°.40'.22",8.

Enfin le logarithme de la distance itinéraire de ces deux points $= 4,1606848$.

Les hauteurs correspondantes du soleil, prises le 30 ventose et le lendemain, ont fait connaitre que la pendule retardait en 24 heures, temps vrai, de $0'.36'',07$; et en effet, le 30, elle n'était en retard sur le midi apparent, que de $0^h.6'.8'',31$; tandis que le 1er germinal elle retardait de $6'.44'',38$.

Il suit de là que pour réduire en temps vrai l'heure de l'observation, il faut, 1°. ajouter $6'.8'',31$ à $18^h.30'.42'',5$, et la somme $18^h.36'.50'',81$ sera le temps écoulé sur la pendule, depuis le 30 ventose à midi, jusqu'au moment de l'observation.

2°. Trouver de combien la pendule retardait sur le temps vrai, à $18^h.36'.50'',81$, et cela au moyen de la proportion

$$23^h.59'.23'',93 : 36'',07 :: 18^h.36'.50'',81 : x = 27'',98. \quad (*)$$

3°. Enfin ajouter $27'',98$, retard de la pendule, à $18^h.36'.50'',81$, et l'on aura $18^h.37'.18'',79$ pour le temps vrai cherché.

D'un autre côté, la déclinaison australe du soleil, le 30 ventose à midi, à Porto-Ferraio,............ $= -0°.\ 1'.59'',6$
et le changement en déclinaison, pour le temps vrai de l'observation, et calculé à raison de $23'.41''$ par 24 heures,..................... $= +0\ .18\ .22\ ,6$

Donc la déclinaison boréale du soleil, lors de l'observation........................ $= 0^h.16'.23'',0$

Partant, la distance du soleil au pôle, ou le complément de

(*) En général, si v et d dénotent respectivement les avances ou les retards de la pendule en 24 heures, et sur le midi qui précède l'observation azimuthale, ou un phénomène astronomique quelconque; et que H soit l'heure à laquelle ce phénomène a été remarqué, on aura

$$24^h \pm v : \mp v :: H \mp d : x = \mp \frac{v(H \mp d)}{24 \pm d};$$

et parconséquent l'heure vraie de l'observation sera $(H \mp d) \mp \frac{v(H \mp d)}{24 \pm d}$; le signe supérieur étant relatif à l'avance, et le signe inférieur l'étant au retard de la pendule.

la



la déclinaison. .... =	89°.43'.37"	= C
L'angle horaire, ou le complément à 24 heures de l'heure vraie de l'observation = $5^h.22'.41''21$ .... =	80 .40 .18 ,15	= P
Complément de la latitude......... =	47 .10 .54	= H
Distance entre le centre du soleil et le signal de *Monte Capane*.......... =	151 .37 .22 , 8	= O
Distance de *Capane* au zénith..... =	86 .15 .11 ,88	= A

Toutes ces données étant recueillies, on procédera de la manière suivante aux calculs des azimuths du soleil et de l'objet terrestre.

Type du calcul.

Par la formule (1) on a

$$\log\cos P = 9{,}2097591$$
$$\log\sin H = 9{,}8654075 \qquad \log\cos H = 9{,}8323020$$
$$\log\sin C = 9{,}9999950 \qquad \log\cos C = 7{,}6781220$$
$$9{,}0751616 = 0{,}11889446 \qquad 7{,}5104240 = 0{,}0032391$$
$$+\,0{,}0032391\,0$$
$$\cos B = +\,0{,}12213356 \qquad \log\cos B = 9{,}0868349$$

donc $B = 82°.59'.5'',1$ = distance vraie du soleil au zénith.

Dans le calcul précédent, aucun terme ne s'est trouvé négatif, parceque tous les angles employés sont moindres qu'un quadrans; mais si quelques-uns étaient obtus, leurs cosinus seraient négatifs, et alors il pourrait arriver que par suite de la combinaison des signes, le $\cos B$ fût affecté du signe moins; dans ce cas, B serait obtus. Cependant on a soin, le plus souvent, de ne prendre les azimuths que quand le soleil est à quelques degrés au-dessus de l'horizon; parceque la réfraction est trop incertaine, lorsque l'astre est très-voisin de ce plan.

La formule (2) donne

$$\begin{aligned} \text{Comp.} \log\sin B &= 0{,}0032635 \\ \log\sin P &= 9{,}9942185 \\ \log\sin C &= 9{,}9999950 \\ \hline \text{Log}\sin PZS, \text{ ou } \sin Z &= 9{,}9974770 \end{aligned}$$

donc $Z = 83°.49'.48'',18$, ou $= 96°.10'.11'',82$.

Tel est, dans l'un comme dans l'autre cas, l'azimuth du soleil compté du nord à l'orient.

Nous avons déjà observé que cette solution ne fait pas connaître si Z est plus petit qu'un quadrans, et dans la circonstance actuelle on ne peut guère savoir d'avance de quelle espèce est l'angle Z, vu qu'il diffère trop peu de $90°$; il eût donc fallu, pour lever le doute, employer de préférence la formule (3). Mais si l'on considère le triangle ZPS comme rectangle en Z, et que l'on calcule l'angle horaire P, on saura à quel instant l'angle Z était de $90°$, et l'on pourra décider s'il était aigu ou obtus au moment de l'observation; puisque plus le soleil s'approche du méridien, plus l'angle PZS augmente avant midi. C'est en recourant à ce moyen que nous avons su qu'il fallait adopter pour valeur de Z, la plus grande, $90°.10'.11'',82$ (*); mais d'ailleurs cherchons cet angle *à priori* par la formule (3)

$$\cot Z = \frac{\cot C \sin H}{\sin P} - \cot P \cos H,$$

et nous aurons

(*) En effet, dans l'hypothèse actuelle, le triangle PZS donne, en vertu de l'art. 21,

$$\cos P = \operatorname{tang} H \cot C;$$

d'où

$$\begin{aligned} \cot.\ C &= 7{,}6781270 \\ \operatorname{tang} H &= 0{,}0331055 \\ \hline \cos P &= 7{,}7112325 = 89°.42'.19'',14. \end{aligned}$$

Ainsi l'angle PZS était de $90°$, quand l'angle horaire était de $89°.42'.19'',14$; mais à l'instant de l'observation, celui-ci était seulement de $80°.40'.18'',15$; donc alors l'angle PZS ou Z était obtus.

$$\begin{array}{rlrl}
\text{comp. log sin } P = & 0{,}0057815 & & \\
L.\sin H = & 9{,}8654075 & \cot P = & 9{,}2155406 \\
L.\cot C = & 7{,}6781270 & \cos H = & 9{,}8323030 \\
\hline
+\,7{,}5493160 = & 0{,}00354255 & -\,9{,}0478426 = & 0{,}1116451
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
& +\,0{,}00354255 \\
& -\,0{,}11164510 \\
\hline
\cot z = & -\,0{,}10810255 \quad \log -\,9{,}0338359 \\
z = & 96^\circ.10'.11'',5.
\end{array}$$

Ainsi ce résultat est, à $\frac{3}{10}$ de secondes près, le même que celui que nous avons déjà obtenu.

On aurait aussi B par la formule

$$\sin B = \frac{\sin P . \sin C}{\sin Z},$$

puisque Z est connu; et que les sinus des angles sont proportionnels aux sinus des côtés opposés : en effet

$$\begin{array}{rl}
\text{comp. } \sin Z = & 0{,}0025230 \\
\sin P = & 9{,}9942185 \\
\sin C = & 9{,}9999950 \\
\hline
\sin B = & 9{,}9967365 = 82^\circ.59'.5'';
\end{array}$$

donc, comme ci-dessus, $B = 82^\circ.59'.5''$; et il ne peut y avoir d'incertitude sur l'espèce de cet angle, que dans le cas où le soleil serait à quelques minutes de l'horizon; mais si cette circonstance avait lieu, ce qui est fort rare, on chercherait B par son cosinus comme dans le premier calcul.

Cherchons maintenant la distance apparente du soleil au zénith; on aura par l'art. 119,

B = distance vraie du soleil au zénith.........		82°.59′. 5″,1
Réfraction moyenne pour cette dist. (table XII).	—	7 10,87
Correction de température (table XI) (*).......	+	7,19
Parallaxe du soleil le 1er germinal an 11, à 7° de hauteur, table XVI....................	+	8,44
B' distance apparente du soleil au zénith.......		82°.52′. 9″,86

Réduction à l'horizon, de l'angle observé entre le soleil et l'objet terrestre.

Les élémens de la formule (4) sont, d'après ce qui précède,

$$A = 86°.15'.11'',88$$
$$B' = 82.52.9,86$$
$$O = 151.37.22,80$$
$$A+B'+O = 320.44.44,54$$
$$\tfrac{1}{2}(A+B'+O) = 160.22.22,27 \ldots\ldots\ 160°.22'.22'',27$$
$$A = 86.15.11,88 \qquad B' = 82.52.9,86$$
$$R = 74.7.10,39 \qquad R' = 77.30.12,41$$

et l'on a

$$\text{comp. log sin } A = 0{,}0009291$$
$$\text{comp. log sin } B' = 0{,}0033719$$
$$\log\sin R = 9{,}9831004$$
$$\log\sin R' = 9{,}9895873$$
$$\log\sin^2 \tfrac{1}{2} O' = 19{,}9769888$$
$$\log\sin \tfrac{1}{2} O' = 9{,}9884944 = 76°.52'.10'',2045$$

donc $O' = 153°.44'.20'',41.$

(*) Suivant cette table, le facteur $x+y = -0{,}0167$; ainsi en multipliant la réfraction moyenne $-7'.10'',87$ par ce facteur, on a $+7'',19$ pour la correction de température.

Ainsi la distance angulaire de l'objet terrestre au centre du soleil, comptée sur l'horizon, est de 153°.44'.20",41; pour la réduire au centre de la station ou du fanal de Porto-Ferraio, voici le calcul qu'il faut effectuer.

Calcul de la réduction de l'angle observé, au centre de la station.

Le soleil étant à gauche de l'objet terrestre, on aura, comme l'on sait, pour la correction cherchée, FIG. 45

$$\frac{r \sin(O'+y)}{D \sin 1''};$$

or ici $r = 2^m,5$, $O'+y = 236°.40'.22'',8$; donc

$$\begin{aligned} \log r &= 0{,}3979400 \\ C.\log \sin 1'' &= 5{,}3144251 \\ L.\sin(O'+y) &= -9{,}9219717 \\ C.\log D &= 5{,}8393152 \\ \hline & -1{,}4736520 = -29'',76. \end{aligned}$$

Or à cause de

$$O' = 153°.44'.20'',41$$
$$Z = 96\ .10\ .11\ ,82$$

L'azimuth approché du signal de Monte-Capane.............................. = 249 .54 .32 ,23

D'un autre côté, la correction au centre étant................................ = — 29 ,76

L'azimuth exact de Monte-Capane, compté du nord à l'est........................ = 249°.54'. 2",47

Si l'on comptait le même azimuth du nord à l'ouest, sa valeur serait 110°.5'.57",53.

134. Toutes les circonstances du calcul seraient les mêmes, si au lieu du soleil, on observait une étoile; et l'on conçoit que si la pendule était exactement réglée sur les fixes, la différence

entre le temps de l'observation azimuthale et celui du passage de l'étoile au méridien, comptés sur la pendule, serait l'angle horaire P; mais pour observer ce passage, il faut être pourvu d'une lunette méridienne (art. 113); sinon, l'on trouvera l'heure à laquelle l'astre est le plus élevé sur l'horizon, par la méthode des hauteurs correspondantes : on connaîtra donc encore, par ce moyen, l'angle horaire P. Ensuite, après avoir rassemblé les autres élémens du calcul, c'est-à-dire, la déclinaison de l'étoile corrigée de la précession, de la nutation et de l'aberration, on procédera absolument comme ci-dessus.

Mais lorsque la pendule marque chaque jour l'ascension droite des étoiles au moment de la culmination (art. 124), on a sur-le-champ l'angle horaire de l'étoile que l'on compare à l'objet terrestre, en prenant la différence entre l'heure même de l'observation, donnée par la pendule, et l'ascension droite de l'étoile, convertie en temps à raison de 15° par heure.

Enfin, si la pendule n'est point réglée, on opérera ainsi qu'il a été dit à l'art. 125, et l'on calculera le temps sydéral pour le moment de l'observation, comme par la méthode exposée au commencement de cet article. La comparaison de ce temps avec l'ascension droite de l'étoile donnera de même l'angle horaire, que l'on réduira ensuite en degrés à raison de une heure par 15°. On pourrait employer aussi, à cet effet, le temps vrai de l'observation, et celui du passage de l'étoile au méridien (art. 117).

Il y a de l'avantage à choisir l'étoile polaire, parceque sa variation en azimuth est peu sensible, et que la réduction à l'horizon, de l'angle observé entre l'étoile et le signal, est presque nulle, lorsque cet angle approche 90°; mais comme il convient d'observer l'azimuth pendant le jour ou durant le crépuscule, et qu'il faut pour cela de bons yeux et beaucoup d'habitude, nous pensons qu'il vaut mieux s'en tenir à la méthode précédente.

APPENDICE.

Description détaillée du Cercle répétiteur.

135. Le cercle répétiteur est vu en perspective dans la planche III, et ses projections géométrales, ainsi que les différentes pièces dont il est composé, sont représentées dans les planches suivantes. Nous avons eu soin de désigner les mêmes objets par les mêmes lettres, afin qu'on puisse les reconnaître plus facilement.

On voit dans les planches III et IV que le cercle est taillé intérieurement en biseau; par ce moyen, les deux agraffes à ressort Rp, $R'p'$, passent librement l'une au-dessus de l'autre.

L'agraffe qui accompagne chaque alidade sert à la rendre fixe sur le limbe de l'instrument: pour cet effet, l'on fait tourner dans le sens convenable la vis de pression p, p', et quand on commence à éprouver de la résistance, on est sûr que l'alidade ne peut plus se mouvoir indépendamment du limbe.

A chaque agraffe est adaptée une vis de rappel R, R', au moyen de laquelle on fait avancer ou reculer lentement l'alidade. C'est l'alidade elle-même qui entraîne, du côté des divisions du limbe, le *nonius* ou *vernier*, dont nous avons parlé à l'art. 49.

Chaque alidade porte un micromètre L, qui sert pour lire plus facilement les divisions. A certains cercles, le micromètre se rapproche ou s'éloigne de la lunette, en tournant une vis de rappel y; mais à ceux que l'on construit maintenant, ce micromètre est seulement supporté par une petite branche de cuivre fixée à l'alidade; et en effet, cela est suffisant, parceque le champ du micromètre embrasse à-la-fois les divisions du nonius.

Les lunettes posent sur des talons attachés aux alidades; par ce moyen elles sont un peu élevées au-dessus du limbe.



mm sont les recouvremens des objectifs. Le plus souvent ces recouvremens peuvent s'éloigner ou se rapprocher assez de l'oculaire, pour que les fils des réticules paraissent nettement et sans parallaxe, c'est-à-dire, sans que l'image de l'objet semble changer de place à l'égard des soies, lorsqu'on promène l'œil autour de l'axe optique. Quand les recouvremens sont mobiles, les réticules sont fixes dans le sens de l'axe de la lunette; mais ils s'élèvent ou s'abaissent perpendiculairement au limbe, à l'aide des vis de rappel r, r'.

Les extrémités de l'axe X traversent les sommets des supports Z, Z. Cet axe, en tournant, incline la tige G placée perpendiculairement au centre du cercle auquel elle sert de pivot. Pour incliner le cercle à volonté et le conserver dans la position que l'on juge convenable, on desserre d'abord la vis P du quart de cercle C, attaché à l'axe; puis on la serre, quand on a obtenu l'inclinaison desirée.

La tige G traverse une espèce de cylindre TT', qui porte le nom de *tambour*, et dans lequel est enchâssé un plomb servant de contre-poids au cercle, pour l'empêcher de chavirer, dans le cas où l'on oublierait de presser avec la vis P, le quart de cercle C, contre le support Z.

Le périmètre du tambour est dentelé de manière qu'à l'aide de la vis sans fin IV, qui engrène dans cette dentelure, on fait tourner insensiblement le cercle et les lunettes, sans que la colonne S participe à ce mouvement. Cette vis sans fin se détache du tambour au moyen d'un pivot tournant auquel est fixée une petite pièce d'acier faisant l'office d'un levier. Pour que la vis n'occasionne qu'un très-faible soubresaut au cercle, lorsqu'on la fait engrener, il est essentiel que les filets de la dentelure du tambour soient le plus près possible les uns des autres.

Les supports Z, Z sont unis par une traverse, et forment ce que l'on nomme quelquefois la *fourchette*. Cette traverse se fixe à la colonne de l'instrument, en la plaçant sur le talon qui termine cette colonne, et en l'arrêtant par le moyen des vis H, H. On voit donc que l'instrument est composé de deux parties qui peuvent être réunies ou séparées à volonté. On les sépare pour les

les emboîter et les transporter plus commodément; cependant quand le cercle n'a que 10 pouces de diamètre, le tout peut ne faire qu'un seul et même corps.

Le pié de la colonne est placé au milieu d'un cercle denté *zz'*, que l'on nomme *cercle azimuthal*, et dont l'usage a été indiqué aux art. 63 et 129. Ce cercle est établi à demeure sur le pié de l'instrument, composé de trois branches *V*, *V'*, *V''*. Le bas de la colonne entraîne, par son mouvement de rotation, une alidade *zz'*, à l'une des extrémités de laquelle est un nonius qui sert pour estimer les parties des divisions du cercle azimuthal. La vis de pression *K* est destinée à arrêter ce mouvement, tandis que la vis d'engrenage, ou le pignon *O*, sert à le procurer.

Les branches dont le pié du cercle est composé s'élèvent ou s'abaissent à l'aide des grandes vis *V*, *V'*, *V''*, qui supportent tout l'instrument; mais comme avec ces vis on incline trop brusquement le limbe, on pose l'une d'elles sur une petite pièce *ce'*, à trois branches; cette pièce se nomme *étrier* et fait la fonction d'un levier du deuxième genre. En tournant la petite vis *v*, cet étrier s'abaisse ou s'élève insensiblement du côté de cette vis, et parconséquent l'instrument s'incline aussi peu que l'on veut.

Il résulte de ce qui précède, 1°. que les deux lunettes peuvent être rendues fixes ou mobiles, indépendamment l'une de l'autre; 2°. que la colonne étant immobile, le limbe peut tourner rapidement ou lentement autour de la tige *G*, selon qu'on désengrène ou que l'on fait agir la vis du tambour; 3°. que tout l'instrument peut tourner de la même manière sur sa colonne; 4°. enfin que le limbe s'incline dans deux positions différentes, au moyen du quart de cercle et des vis du pié. Tels sont les mouvemens avec lesquels on doit se bien familiariser, pour pouvoir observer, avec promptitude et succès, les angles entre les objets terrestres.

Dans la planche VIII, n° 1, on voit le plan et les profils de l'extrémité de l'alidade du cercle azimuthal, où se trouve le nonius. On y voit en outre, n° 2, les plan et élévation de l'étrier à l'aide duquel on incline la colonne du cercle; et les pièces qui sont désignées par le n° 3 sont les dessins de l'extrémité de l'alidade du cercle azimuthal, opposé au nonius.

Dans la planche IX, les nos 1 et 4 représentent le tambour vu de profil; et le n° 3 le représente vu de face.

Enfin dans la planche X sont compris, sous le n° 1, les dessins des extrémités des alidades de la lunette supérieure, du côté de l'objectif; sous le n° 2, le profil de l'agraffe de cette alidade; sous le n° 3, les dessins de l'agraffe de cette même alidade, placée du côté de l'oculaire; sous le n° 4, le profil de l'objectif accompagné de son micromètre; enfin, au n° 5, on voit, sous différentes faces, les extrémités de la lunette supérieure.

Il nous reste à parler du niveau de la lunette inférieure, et de celui qui est adapté à la tige *G*. Le premier et le plus grand, *df*, est attaché à la lunette *A'B'*, et est garni d'une petite règle divisée vers les extrémités; afin de voir, sur-le-champ, si la bulle d'air est exactement au milieu du tube; auquel cas la lunette est de niveau, si toutefois l'artiste a eu soin de rendre l'axe optique de cette lunette exactement parallèle à celui du tube.

Quant au petit niveau *gk*, l'une de ses extrémités est ordinairement fixée à une charnière, tandis que l'autre extrémité peut être soulevée par le moyen d'une vis. Ce petit niveau, comme nous l'avons dit à l'art. 51, sert à faire juger si le limbe, une fois disposé verticalement à l'aide d'un fil à plomb, conserve cette position pendant la durée de l'observation d'une distance au zénith. Pour mesurer cette distance, il faut que le limbe, lors de la première observation conjuguée, soit à droite de celui qui opère; ensuite on fait faire une demi-révolution à l'instrument, afin d'amener le limbe à gauche et de faire la deuxième observation conjuguée. Mais ce procédé, ainsi que celui par lequel on mesure la distance angulaire entre deux objets, sont suffisamment expliqués à l'art. 50.

Supplément à la mesure des hauteurs, par les procédés géométriques.

136. Pour compléter la théorie qui fait le sujet du chapitre XVI, livre III, nous donnerons ici une idée d'une nouvelle méthode exposée par l'auteur de la Mécanique céleste. Cette méthode consiste, d'abord, à calculer la hauteur d'un objet sans avoir égard à la réfraction; et ensuite à tenir compte de la correction due à la réfraction, à l'aide d'une formule que nous allons faire connaître.

La variation de la densité de l'air, près de la surface de la terre, et d'autres circonstances physiques modifiant singulièrement la valeur de la réfraction terrestre à l'horizon, il n'y a rien de mieux à faire, dans ce cas, que de déterminer directement cette réfraction par des observations réciproques, comme nous l'avons enseigné (art. 106); sinon l'on pourra, suivant M. Laplace, adopter pour valeur du coefficient n de la réfraction, $\frac{1}{11,9003}$; ce qui est d'ailleurs conforme aux observations. Mais ce savant illustre démontre qu'à des hauteurs apparentes un peu grandes, la valeur de la réfraction terrestre, comme celle de la réfraction astronomique, est indépendante de toute hypothèse sur la constitution de l'atmosphère.

Cela posé, soit z la hauteur cherchée, au-dessus du niveau de l'observateur, et calculée sans avoir égard à la réfraction; Δz la correction due à cette réfraction, et δ la distance apparente au zénith, supposée moindre que 88^{g}; on aura (Mécanique céleste, tome IV, page 280), hauteur vraie $= z - \Delta z$, et

$$\Delta z = \left\{ \frac{0,0029876 \times \frac{h'_{\circ}}{0^{m},76}}{1 + 0,00375\,t'}\, z - 3,08338(h'_{\circ} - h_{\circ}) \right\} \frac{1}{\cos^{2}\delta}, \qquad (A)$$

$h_{\circ}$ et $h'_{\circ}$ étant les hauteurs respectives des baromètres aux stations supérieure et inférieure, le mercure y étant réduit à zéro de température. Si donc $\pm t$, $\pm t'$ expriment les températures

du mercure aux mêmes stations ; h, h' étant les hauteurs observées du baromètre, on aura

$$h_{\circ}=\frac{h}{1\pm\frac{t}{5412}} \quad \text{et} \quad h'_{\circ}=\frac{h'}{1\pm\frac{t'}{5412}};$$

en prenant le signe supérieur lorsque la température est au-dessus de zéro, et le signe inférieur dans le cas contraire.

Le plus souvent on ne pourra se procurer h, et dans ce cas on négligera le second terme de la correction (A), qui est d'ailleurs fort petit; c'est-à-dire que l'on n'aura égard qu'à la hauteur du baromètre et du thermomètre à la station la plus basse. Il suit de là que Δz sera simplement

$$\Delta z=\frac{0{,}0003866 79\,h'_{\circ}}{1+0{,}00375t'}\cdot\frac{z}{\cos^2\delta}. \qquad (B)$$

Pour calculer cette correction, il faut d'abord déterminer z. Or si dans la formule (2) de l'art. 106 on suppose $r=0$, on aura

$$z=K\cot(\delta-\tfrac{1}{2}C).$$

La distance horizontale K se détermine à l'aide de la formule donnée par M. Laplace, ou dérive des opérations trigonométriques; et la valeur de C se trouve par le procédé de la page 86 de cet Ouvrage.

137. Il importe en outre, d'observer que la formule (7) page 234, n'est exacte que lorsque le sommet de la montagne est peu élevé au-dessus de l'horizon de la mer: puisque cette formule résulte de l'hypothèse que la réfraction est la même aux deux extrémités A, B, *fig.* 38. Ainsi pour déterminer avec plus de précision une grande hauteur, celle du Pic de Ténérif, par exemple; il faudra encore recourir à la théorie de l'auteur de la Mécanique céleste : si donc q est la tangente de l'angle de dépression apparente de l'horizon visuel AB, à la hauteur N, on aura

$$q=\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{2N-2\alpha a\left(1-\frac{h}{0^{m},76}\cdot\frac{1}{(1+0{,}00375\,t)\left(1+\frac{t}{5412}\right)}\right)}$$

h étant, comme ci-dessus, la hauteur métrique du baromètre, et t celle du thermomètre centigrade, au sommet de la montagne: de plus a désignant le rayon moyen de la terre (page 245) et α étant égal à 0,000293876; mais à cause de $q = -\cot\delta$, δ étant la distance au zénith VBA telle qu'elle a été observée, on tirera de la formule précédente

$$N = \frac{a\cot^2\delta}{2} + \alpha a\left(1 - \frac{h}{0^m,76} \cdot \frac{1}{(1+0,00375\,t)\left(1+\frac{t}{5412}\right)}\right);$$

c'est celle-ci qui doit, dans cette circonstance, remplacer la formule (7). On se rappellera qu'il faut changer le signe qui précède t, lorsque la température est au-dessous de zéro; et si l'on voulait encore avoir égard aux considérations de la page 246, il faudrait écrire $\frac{T}{5412}$ au lieu de $\frac{t}{5412}$; mais la différence entre la température de l'air ambiant et celle du mercure est ordinairement fort petite, et souvent nulle.

On pourra, à l'aide des formules ci-dessus, ou d'un nivellement fait avec soin, vérifier les hauteurs déterminées par de seules observations barométriques (art. 110).

Il nous resterait à faire voir comment ces formules se modifient, dans le cas où l'on n'aurait point de hauteurs du baromètre; mais cela nous engagerait dans de trop grands développemens. Voyez d'ailleurs, sur cette matière, la *Mécanique céleste*.

Résumé de quelques valeurs numériques employées en géodésie.

Rayon réduit en secondes { sexagésimales .. log = 5,3144251331 7
centésimales... log = 5,8038801 2297.

Demi-circonférence d'un cercle dont le rayon = 1.. log = 0,4971498 7269.

Aplatissement de la terre = $\frac{1}{334}$. Quarré de son excentricité = 0,005979058.

Rayon de l'équateur, exprimé en { toises......... log = 6,5147105152.
mètres........ log = 6,8045305 08.

Rayon de la terre au pôle, en { toises......... log = 6,5134083 12.
mètres........ log = 6,8032283 05.

Rayon de la terre exprimé en mètres, à la latitude L,

$$\log = 6{,}80380856 + 0{,}00065 11 131 \cos 2L$$
$$- 0{,}0000014\ 642 \cos 4L + 0{,}0000000\ 0328 \cos 6L.$$

Rayon de courbure de l'arc perpendiculaire au méridien, exprimé en mètres,

à la latitude L, $\log = 6{,}80518\ 11363 - 0{,}00065\ 11160 \cos 2L$
$+ 0{,}00000\ 04881 \cos 4L - 0{,}00000\ 000048 \cos 6L.$

Rayon de la terre supposée sphérique = 6366198$^{mét.}$;... log = 6,8038801.
Grade de l'équateur = 100149$^{mét.}$,87;.............. log = 5,0006503 87.
Grade du méridien, mesuré sous l'équateur, = 99552$^{mét.}$,32; log = 4,9980514.
Grade du méridien sous le parallèle de 50$^{gr.}$, = 100000^{mètres}.
Grade de longitude, à la latitude L, = $100224^m{,}887358 \cos L - 75^m{,}102933 \cos 3L$
$+ 0^m{,}084434 \cos 5L - 0^m{,}000104 \cos 7L.$

Log de 24 heures, ou de 86400".............. = 4,9365137.
Log de 360 degrés, ou de 1296000".......... = 6,1126050.
Log de 400 grades.......................... = 2,6020599.

Vîtesse du son, 337^m,27 par seconde sexagésimale.

Longueur du pendule simple, réduit au vide, et battant à Paris, les secondes { sexagésim. = 0^m,99383 87446.
centésim. = 0 ,74 1887.

En divisant cette dernière quantité par $0{,}99676 + 0{,}0056724 \sin^2 L$, L étant la latitude de l'Observatoire de Paris, on a $0^m{,}741905$; c'est le facteur par lequel on doit multiplier $0{,}99676 + 0{,}0056724 \sin^2 L$, pour avoir la longueur absolue du pendule à secondes centésimales, dans un lieu quelconque; cette longueur égale donc $0^m{,}739502 + 0^m{,}004208 \sin^2 L$. (*Mécanique céleste*, tome II, page 51).

Longueur de la toise $= 1^{mèt.}{,}94904$........ $\log = 0{,}2898199927$.

FIN.

ERRATA.

Page 6, ligne 5, *ou au midi*, lisez, *au midi vrai.*

Page 29, dans les valeurs de sin x et tang x les puissances de x doivent former la série 1.3.5...; et après la parenthèse, mettez (A).

Page 49, ligne 10, au dénominateur, lisez, $a^2 - r^2 - c^2$.

Page 57, ligne 7, ce qu'il nous reste, lisez, ce qui nous reste.

Ibid., ligne 6, en remontant, l'art., lisez, l'art. 18.

Page 68, ligne 6, c'est-à-dire que, lisez, ou que.

Page 74, ligne 13, en remontant, révolution entière, lisez, demi-révolution.

Page 83, ligne 11, 50",30, lisez, 52,30, et au lieu de 126",83, lisez, 136",83.

Page 84, ligne 6, en remontant, 136",62, lisez, 136",82.

Page 95, ligne 1, au numérateur, au lieu de $(D+y)$, lisez $(O+y)$.

Ibid., ligne 4, au lieu de 249,1, lisez 294,1.

Page 104, ligne 2, le moyen, lisez, le milieu.

Ib. lig. 12, on les place, lisez, on les pose; et plus bas lisez, comme on le voit.

Page 128, ligne 10, *CaE*, lisez, *aCE*.

Page 132, dans l'équation (15), avant $-\frac{11}{128}e^4 \ldots$, ajoutez le terme $+\frac{9}{16}e^4 \frac{\sin^2(L-L')\cos^2(L+L')}{(L-L')^2}$. A la vérité, ce terme est insensible pour la zône dans laquelle la France est inscrite, mais il n'est plus négligeable au-delà.

Page 133, ligne 11 en remontant, grand axe, lisez, demi-grand axe.

Page 134, ligne 6 en remontant, du Pérou, lisez, dite du Pérou.

Page 139, ligne 17, $-L-E'$, lisez $-L'-E'$.

Page 142, note ligne 3, $+a^2y^2$, lisez, $+y^2$.

Page 144, ligne 3 en remontant, table III, lisez table IX.

Page 147, ligne 11, $+\frac{5}{16}\sin^6 L \cos L$, lisez, $+\frac{5}{16}e^6\sin^5 L \cos L\}$.

Ibid., ligne 8 en remontant, rayon, lisez, grade.

Ibid., ligne 10 en remontant, nombre, lisez membre.

Page 160, *note*, ligne 7, $-2\sin\frac{1}{2}\varphi\sin^2 Z\,\mathrm{tang}^2 L$, lisez, $-2\sin\frac{1}{2}\varphi\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\varphi\sin^2 Z\,\mathrm{tang}^2 L$.

Ibid., ligne 13, $\cos^2\frac{1}{2}\Phi$, lisez, $\cos^3\frac{1}{2}\varphi$.

Page 164, ligne 14, sur l'horizon dn Panthéon, lisez, sur l'horizon de Montlhéry.

Page 171, ligne 2, avec l'une des deux distances, lisez, avec deux des distances.

Page 174, ligne 9, *calcul de droite*, au lieu de 8gr,2304, lisez 8gr,23024.

Page 175, ligne 14, après l'équation, au lieu de la virgule, mettez un point.

Page 178, ligne 5, lisez ainsi le second membre,

$$= 2\sin\left(\frac{\gamma+\gamma'+\gamma''}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma+\gamma'-\gamma''}{2}\right).$$

Ibid., ligne 7, *ibid*......... $= 2\sin\left(\frac{\gamma-\gamma'+\gamma''}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma'+\gamma''-\gamma}{2}\right)$;

Page 191, ligne 7, mettez 93 pour n° de l'article.

Page 202, ligne 3 en remontant, tang $(\psi - s)$, lisez, $(\mathrm{tang}\,\psi - s)$.

Page 209, lignes 1 et 2, de l'équation, lisez, de l'équation (I).

Page 210, ligne 10, au numérateur du second membre, mettez le facteur s.

TABLES

GÉODÉSIQUES.

TABLE I.

ARGUMENT A, *ou Angle à réduire.*

Pour réduire à l'horizon, le nombre Tangente est positif et le nombre Cotangente négatif; c'est le contraire pour l'angle des cordes.

Angl. Grades.	Decigrades,	Tang. Decimilligrad.	D.	Cotang. Decimilligrad.	Diff.	Grades.	Decigrades,
	0	0"00				200ᵍ	0
	1	0.05	5	81056"90			9
	2	0.10	5	40528.43	40528"47		8
	3	0.15	5	27018.93	13509.50		7
	4	0.20	5	20310.88	6708.05		6
	5	0.25	5	16211.31	4099.57		5
			5		2701.92		
	6	0.30		13509.39			4
	7	0.35	5	11579.44	1929.95		3
	8	0.40	5	10132.02	1447.42		2
	9	0.45	5	9006.76	1125.26		1
1ᵍ	0	0.50	5	8105.53	901.23	199	0
			5		736.90		
	1	0.55		7368.63			9
	2	0.60	5	6754.54	614.09		8
	3	0.65	5	6234.93	519.61		7
	4	0.70	5	5789.55	445.38		6
	5	0.75	5	5403.55	386.00		5
			5		337.76		
	6	0.80		5065.79			4
	7	0.85	5	4767.77	298.02		3
	8	0.90	5	4502.86	264.91		2
	9	0.95	5	4265.84	237.02		1
2	0	1.00	5	4052.51	213.33	198	0
			5		193.01		
	1	1.05		3859.50			9
	2	1.10	5	3684.04	175.56		8
	3	1.15	5	3523.83	161.21		7
	4	1.20	5	3376.97	146.86		6
	5	1.25	5	3241.86	135.11		5
			5		124.72		
	6	1.30		3117.14			4
	7	1.35	5	3001.66	115.48		3
	8	1.40	5	2894.42	107.24		2
	9	1.45	5	2794.58	99.84		1
3	0	1.50	5	2701.40	93.18	197	0
		Cot.		Tang.		Angle.	

Angl.		Tang	D.	Cotang.	Diff.		
			5		87"18		
3ᵍ	1	1"55		2614"22		196ᵍ	9
	2	1.60	5	2532.49	81.73		8
	3	1.65	5	2455.72	76.77		7
	4	1.70	5	2383.46	72.26		6
	5	1.75	5	2315.33	68.13		5
			5		64.35		
	6	1.80		2250.98			4
	7	1.85	5	2190.11	60.87		3
	8	1.90	5	2132.44	57.67		2
	9	1.95	5	2077.73	54.71		1
4	0	2.00	5	2025.76	51.97	196	0
			5		49.44		
	1	2.05		1976.32			9
	2	2.10	5	1929.23	47.09		8
	3	2.15	5	1884.33	44.90		7
	4	2.20	5	1841.37	42.96		6
	5	2.25	5	1800.42	40.95		5
			5		39.18		
	6	2.30		1761.24			4
	7	2.35	5	1723.83	37.51		3
	8	2.40	5	1687.89	35.94		2
	9	2.45	5	1653.41	34.48		1
5	0	2.50	5	1620.31	33.10	195	0
			5		31.71		
	1	2.55		1588.60			9
	2	2.60	5	1557.92	30.68		8
	3	2.65	5	1528.49	29.43		7
	4	2.70	5	1500.15	28.34		6
	5	2.75	5	1472.86	27.29		5
			5		26.35		
	6	2.80		1446.51			4
	7	2.85	5	1421.10	25.41		3
	8	2.90	5	1396.57	24.53		2
	9	2.95	5	1372.86	23.71		1
6	0	3.00	5	1349.95	22.91	194	0
			5		22.16		
	1	3.05		1327.79			9
	2	3.10	5	1306.34	21.45		8
	3	3.15	5	1285.57	20.77		7
	4	3.20	5	1265.45	20.12		6
	5	3.25	5	1245.95	19.50		5
		Cot.		Tang.		Angle.	

Angle.		Tang	D.	Cotang.	Diff.		
			5		18"92		
6ᵍ	6	2"30		1227"03		193ᵍ	4
	7	3.35	5	1208.69	18.34		3
	8	3.40	5	1190.88	17.81		2
	9	3.45	5	1173.58	17.30		1
7	0	3.50	5	1156.79	16.79	193	0
			5		16.33		
	1	3.55		1140.46			9
	2	3.60	5	1124.59	15.87		8
	3	3.65	5	1109.15	15.44		7
	4	3.70	5	1094.13	15.02		6
	5	3.75	5	1079.51	14.62		5
			5		14.24		
	6	3.80		1065.27			4
	7	3.85	5	1051.40	13.87		3
	8	3.90	5	1037.89	13.51		2
	9	3.96	6	1024.72	13.17		1
8	0	4.01	5	1011.88	12.84	192	0
			5		12.53		
	1	4.06		999.35			9
	2	4.11	5	987.13	12.22		8
	3	4.16	5	975.21	11.92		7
	4	4.21	6	963.56	11.65		6
	5	4.26	5	952.19	11.37		5
			5		11.10		
	6	4.31		941.09			4
	7	4.36	5	930.24	10.85		3
	8	4.41	5	919.64	10.60		2
	9	4.46	5	909.27	10.37		1
9	0	4.51	5	899.13	10.14	191	0
			5		9.91		
	1	4.56		889.22			9
	2	4.61	5	879.52	9.70		8
	3	4.66	5	870.03	9.49		7
	4	4.71	5	860.74	9.29		6
	5	4.76	5	851.65	9.09		5
			5		8.91		
	6	4.81		842.74			4
	7	4.86	5	834.02	8.72		3
	8	4.91	5	825.48	8.54		2
	9	4.96	5	817.11	8.37		1
10	0	5.01	5	808.90	8.21	190	0
		Cot.		Tang.		Angle.	

TABLE I. Argument, *Angle à réduire.*

Angle.		Tang.	D.	Cotang.	Diff.		
10°	1	5"06	5	800"86	8"04	189°	9
	2	5.11	5	792.98	7.8		8
	3	5.16	5	785.24	7.74		7
	4	5.21	5	777.66	7.58		6
	5	5.26	5	770.22	7.44		5
	6	5.31	5	762.92	7.30		4
	7	5.36	5	755.76	7.16		3
	8	5.41	5	748.72	7.04		2
	9	5.46	5	741.82	6.9		1
11	0	5.51	5	735.05	6.77	189	0
	1	5.56	5	728.39	6.66		9
	2	5.61	5	721.86	6.53		8
	3	5.66	5	715.44	6.42		7
	4	5.71	5	709.14	6.30		6
	5	5.77	6	702.94	6.20		5
	6	5.82	5	696.84	6.10		4
	7	5.87	5	690.85	5.99		3
	8	5.92	5	684.96	5.89		2
	9	5.97	5	679.17	5.79		1
12	0	6.02	5	673.47	5.70	188	0
	1	6.07	5	667.87	5.60		9
	2	6.12	5	662.37	5.50		8
	3	6.17	5	656.95	5.42		7
	4	6.22	5	651.62	5.33		6
	5	6.27	5	646.37	5.25		5
	6	6.32	5	641.20	5.17		4
	7	6.37	5	636.12	5.08		3
	8	6.42	5	631.12	5.00		2
	9	6.47		626.20	4.92		1
13	0	6.52	5	621.35	4.85	187	0
	1	6.57	5	616.57	4.78		9
	2	6.62	5	611.86	4.71		8
	3	6.67	5	607.23	4.63		7
	4	6.72	5	602.67	4.56		6
	5	6.78	6	598.17	4.50		5
	6	6.83	5	593.74	4.43		4
	7	6.88	5	589.37	4.37		3
	8	6.93	5	585.07	4.30		2
	9	6.98	5	580.83	4.24		1
14	0	7.03	5	576.64	4.19	186	0
	1	7.08	5	572.52	4.12		9
	2	7.13	5	568.45	4.07		8
	3	7.18	5	564.45	4.00		7
	4	7.23	5	560.49	3.96		6
	5	7.28	5	556.59	3.90		5
	6	7.33	5	552.75	3.84		4
	7	7.38	5	548.95	3.80		3
	8	7.43	5	545.21	3.74		2
	9	7.48	5	541.52	3.69		1
15	0	7.53	5	537.88	3.64	185	0
		Cot.		Tang.		Angle.	

Angle.		Tang.	D.	Cotang.	Diff.		
15°	1	7"59	6	534"28	3"60	184°	9
	2	7.64	5	530.73	3.55		8
	3	7.69	5	527.23	3.50		7
	4	7.74	5	523.77	3.46		6
	5	7.79	5	520.36	3.41		5
	6	7.84	5	516.99	3.37		4
	7	7.89	5	513.67	3.32		3
	8	7.94	5	510.38	3.29		2
	9	7.99	5	507.14	3.24		1
16	0	8.04	5	503.94	3.20	184	0
	1	8.09	5	500.78	3.16		9
	2	8.14	5	497.65	3.13		8
	3	8.19	5	494.56	3.09		7
	4	8.25	6	491.51	3.05		6
	5	8.30	5	488.50	3.01		5
	6	8.35	5	485.53	2.97		4
	7	8.40	5	481.59	2.94		3
	8	8.45	5	479.68	2.91		2
	9	8.50	5	476.80	2.88		1
17	0	8.55	5	473.96	2.84	183	0
	1	8.60	5	471.16	2.80		9
	2	8.65	5	468.39	2.77		8
	3	8.70	5	465.65	2.74		7
	4	8.75	5	462.94	2.71		6
	5	8.81	6	460.26	2.68		5
	6	8.86	5	457.61	2.65		4
	7	8.91	5	454.99	2.62		3
	8	8.96	5	452.40	2.59		2
	9	9.01	5	449.84	2.56		1
18	0	9.06	5	447.31	2.53	182	0
	1	9.11	5	444.81	2.50		9
	2	9.16	5	442.33	2.48		8
	3	9.21	5	439.88	2.45		7
	4	9.26	5	437.46	2.42		6
	5	9.32	6	435.06	2.40		5
	6	9.37	5	432.69	2.37		4
	7	9.42	5	430.34	2.35		3
	8	9.47	5	428.02	2.32		2
	9	9.52	5	425.72	2.31		1
19	0	9.57	5	423.44	2.26	181	0
	1	9.62	5	421.19	2.25		9
	2	9.67	5	418.97	2.22		8
	3	9.72	5	416.76	2.21		7
	4	9.78	6	414.58	2.18		6
	5	9.83	5	412.42	2.16		5
	6	9.88	5	410.28	2.14		4
	7	9.93	5	408.16	2.12		3
	8	9.98	5	406.07	2.09		2
	9	10.03	5	404.00	2.07		1
20	0	10.08	5	401.95	2.05	180	0
		Cot.		Tang.		Angle.	

Angle.		Tang.	D	Cotang.	Diff.		
20°	1	10"13	5	399"92	2"03	179°	9
	2	10.19	6	397.90	2.02		8
	3	10.24	5	395.90	2.00		7
	4	10.29	5	393.93	1.97		6
	5	10.34	5	391.98	1.95		5
	6	10.39	5	390.04	1.94		4
	7	10.44	5	388.12	1.92		3
	8	10.49	5	386.22	1.91		2
	9	10.54	5	384.34	1.88		1
21	0	10.60	6	382.48	1.86	179	0
	1	10.65	5	380.63	1.85		9
	2	10.70	5	378.80	1.83		8
	3	10.75	5	376.99	1.81		7
	4	10.80	5	375.20	1.79		6
	5	10.85	5	373.42	1.78		5
	6	10.90	5	371.66	1.76		4
	7	10.96	6	369.91	1.75		3
	8	11.01	5	368.18	1.73		2
	9	11.06	5	366.47	1.71		1
22	0	11.11	5	364.77	1.70	178	0
	1	11.16	5	363.08	1.69		9
	2	11.21	5	361.41	1.67		8
	3	11.27	6	359.76	1.65		7
	4	11.32	5	358.12	1.64		6
	5	11.37	5	356.50	1.62		5
	6	11.42	5	354.89	1.61		4
	7	11.47	5	353.29	1.60		3
	8	11.52	5	351.71	1.58		2
	9	11.58	6	350.14	1.57		1
23	0	11.63	5	348.58	1.56	177	0
	1	11.68	5	347.04	1.54		9
	2	11.73	5	345.51	1.53		8
	3	11.78	5	343.99	1.52		7
	4	11.83	5	342.49	1.51		6
	5	11.88	5	341.00	1.49		5
	6	11.94	6	339.52	1.48		4
	7	11.99	5	338.05	1.4		3
	8	12.04	5	336.60	1.45		2
	9	12.09	5	335.16	1.44		1
24	0	12.14	5	333.73	1.43	176	0
	1	12.20	6	332.31	1.42		9
	2	12.25	5	330.90	1.41		8
	3	12.30	5	329.51	1.39		7
	4	12.35	5	328.13	1.38		6
	5	12.40	5	326.76	1.37		5
	6	12.46	6	325.40	1.36		4
	7	12.51	5	324.05	1.35		3
	8	12.56	5	322.71	1.34		2
	9	12.61	5	321.38	1.33		1
25	0	12.66	5	320.06	1.32	175	0
		Cot.		Tang.		Angle.	

TABLE I. Argument; *Angle à réduire.*

Angle.	Tang.	D.	Cotang.	Diff.	
		6		1"31	
25° 1	12"72		318"75		174° 9
2	12.77	5	317.45	1.30	8
3	12.82	5	316.16	1.29	7
4	12.87	5	314.88	1.28	6
5	12.92	5	313.61	1.27	5
		6		1.26	
6	12.98		312.35		4
7	13.03	5	311.10	1.25	3
8	13.08	5	309.86	1.24	2
9	13.13	5	308.63	1.23	1
26 0	13.18	5	307.41	1.22	174 0
		6		1.21	
1	13.24		306.20		9
2	13.29	5	305.00	1.20	8
3	13.34	5	303.81	1.19	7
4	13.39	5	302.63	1.18	6
5	13.45	6	301.45	1.18	5
		5		1.17	
6	13.50		300.28		4
7	13.55	5	299.12	1.16	3
8	13.60	5	297.97	1.15	2
9	13.65	5	296.83	1.14	1
27 0	13.71	6	295.70	1.13	173 0
		5		1.12	
1	13.76		294.58		9
2	13.81	5	293.46	1.12	8
3	13.86	5	292.35	1.11	7
4	13.92	6	291.25	1.10	6
5	13.97	5	290.16	1.09	5
		5		1.09	
6	14.02		289.07		4
7	14.07	5	287.99	1.08	3
8	14.13	6	286.92	1.07	2
9	14.18	5	285.86	1.06	1
28 0	14.23	5	284.81	1.05	172 0
		5		1.05	
1	14.28		283.76		9
2	14.34	6	282.72	1.04	8
3	14.39	5	281.69	1.03	7
4	14.44	5	280.67	1.02	6
5	14.49	5	279.65	1.02	5
		6		1.01	
6	14.55		278.64		4
7	14.60	5	277.63	1.01	3
8	14.65	5	276.63	1.00	2
9	14.70	5	275.64	99	1
29 0	14.76	6	274.66	98	171 0
		5		98	
1	14.81		273.68		9
2	14.86	5	272.71	97	8
3	14.91	5	271.75	96	7
4	14.97	6	270.79	96	6
5	15.02	5	269.84	95	5
		5		95	
6	15.07		268.89		4
7	15.13	5	267.95	94	3
8	15.18	5	267.02	93	2
9	15.23	5	266.09	93	1
30 0	15.28	5	265.17	92	170 0
	Cot.		Tang.		Angle.

Angle.	Tang.	D.	Cotang.	Diff.	
		6		91	
30° 1	15"34		264"26		169° 9
2	15.39	5	263.35	91	8
3	15.44	5	262.45	90	7
4	15.50	6	261.55	90	6
5	15.55	5	260.66	89	5
		5		89	
6	15.60		259.77		4
7	15.66	6	258.89	88	3
8	15.71	5	258.02	87	2
9	15.76	5	257.15	87	1
31 0	15.81	5	256.29	86	169 0
		6		86	
1	15.87		255.43		9
2	15.92	5	254.58	85	8
3	15.97	5	253.73	85	7
4	16.03	6	252.89	84	6
5	16.08	5	252.05	84	5
		5		83	
6	16.13		251.22		4
7	16.19	6	250.40	82	3
8	16.24	5	249.58	82	2
9	16.29	5	248.78	82	1
32 0	16.35	6	247.95	81	168 0
		5		81	
1	16.40		247.14		9
2	16.45	6	246.34	80	8
3	16.51	6	245.54	80	7
4	16.56	5	244.75	79	6
5	16.61	5	243.96	79	5
		6		78	
6	16.67		243.18		4
7	16.72	5	242.41	77	3
8	16.77	5	241.64	77	2
9	16.83	6	240.87	77	1
33 0	16.88	5	240.11	76	167 0
		5		76	
1	16.93		239.35		9
2	16.99	6	238.59	76	8
3	17.04	5	237.84	75	7
4	17.09	5	237.09	75	6
5	17.15	6	236.35	74	5
		5		74	
6	17.20		235.61		4
7	17.25	5	234.88	73	3
8	17.31	6	234.15	73	2
9	17.36	5	233.43	72	1
34 0	17.42	6	232.71	72	166 0
		5		72	
1	17.47		231.99		9
2	17.52	5	231.28	71	8
3	17.58	6	230.57	71	7
4	17.63	5	229.87	70	6
5	17.69	6	229.17	70	5
		5		70	
6	17.74		228.47		4
7	17.79	5	227.78	69	3
8	17.85	6	227.09	69	2
9	17.90	5	226.41	68	1
35 0	17.96	6	225.73	68	165 0
	Cot.		Tang.		Angle.

Angle.	Tang.	D.	Cotang.	Diff.	•
		5		68	
35° 1	18"05		225"05		164 9
2	18.06	5	224.38	67	8
3	18.12	6	223.71	67	7
4	18.17	5	223.04	67	6
5	18.23	6	222.38	66	5
		5		66	
6	18.28		221.72		4
7	18.33	5	221.07	65	3
8	18.39	6	220.42	65	2
9	18.44	5	219.77	65	1
36 0	18.50	6	219.13	64	164 0
		5		64	
1	18.55		218.49		9
2	18.61	5	217.85	64	8
3	18.66	6	217.21	64	7
4	18.71	5	216.58	63	6
5	18.77	6	215.96	62	5
		5		63	
6	18.82		215.33		4
7	18.88	6	214.71	62	3
8	18.93	5	214.10	61	2
9	18.98	5	213.48	62	1
37 0	19.04	6	212.87	61	163 0
		5		61	
1	19.09		212.26		9
2	19.15	6	211.66	60	8
3	19.20	5	211.06	60	7
4	19.26	6	210.46	60	6
5	19.31	5	209.87	59	5
		6		60	
6	19.37		209.27		4
7	19.42	5	208.68	59	3
8	19.48	6	208.10	58	2
9	19.53	5	207.52	58	1
38 0	19.59	6	206.94	58	162 0
		5		58	
1	19.64		206.36		9
2	19.69	5	205.79	57	8
3	19.75	6	205.21	58	7
4	19.80	5	204.64	57	6
5	19.86	6	204.08	56	5
		5		56	
6	19.91		203.52		4
7	19.97	6	202.96	56	3
8	20.02	5	202.40	56	2
9	20.08	6	201.85	55	1
35 0	20.13	5	201.30	55	161 0
		6		55	
1	20.19		200.75		9
2	20.24	5	200.20	55	8
3	20.30	6	199.66	54	7
4	20.35	5	199.12	54	6
5	20.41	6	198.58	54	5
		5		53	
6	20.46		198.05		4
7	20.52	6	197.51	54	3
8	20.57	5	196.98	53	2
9	20.63	6	196.46	52	1
40 0	20.69	6	195.93	53	160 0
	Cot.		Tang.		Angle.

TABLE I. Argument, *Angle à réduire.*

Angle.	Tang	D	Cotang.	Diff.		Angle.	Tang	D	Cotang.	Diff.		Angle.	Tang	D	Cotang.	Diff.	
40° 1	20.74	5	195.41	52	159° 9	45° 1	23.54	5	172.15	41	154° 9	50° 1	26.43	6	153.35	34	149° 9
2	20.80	6	194.89	52	8	2	23.60	[illegible]	171.73	42	8	2	26.49	6	153.01	34	8
3	20.85	5	194.37	52	7	3	23.66	[illegible]	171.32	41	7	3	26.55	6	152.67	34	7
4	20.91	6	193.86	51	6	4	23.71	5	170.91	41	6	4	26.60	5	152.34	33	6
5	20.96	5	193.34	52	5	5	23.77	[illegible]	170.50	41	5	5	26.66	6	152.00	34	5
		6		51				[illegible]		41				6		33	
6	21.02	5	192.83	50	4	6	23.83	5	170.09	40	4	6	26.72	6	151.67	34	4
7	21.07	6	192.33	51	3	7	23.88	[illegible]	169.69	41	3	7	26.78	6	151.33	33	3
8	21.13	5	191.82	50	2	8	23.94	6	169.28	40	2	8	26.84	6	151.00	33	2
9	21.18	6	191.32	50	1	9	24.00	[illegible]	168.88	40	1	9	26.90	6	150.67	33	1
41 0	21.24		190.82		159 0	46 0	24.06		168.48		154 0	51 0	26.96		150.34		149 0
		6		50				5		40				6		33	
1	21.30	5	190.32	49	9	1	24.11	6	168.08	40	9	1	27.02	6	150.01	32	9
2	21.35	6	189.83	50	8	2	24.17	6	167.68	40	8	2	27.08	5	149.69	33	8
3	21.41	5	189.33	49	7	3	24.23	5	167.28	39	7	3	27.13	6	149.36	32	7
4	21.46	6	188.84	49	6	4	24.28	[illegible]	166.89	39	6	4	27.19	6	149.04	33	6
5	21.52		188.35		5	5	24.34		166.50		5	5	27.25		148.71		5
		5		48				[illegible]		39				6		32	
6	21.57	6	187.87	49	4	6	24.40	6	166.11	39	4	6	27.31	6	148.39	32	4
7	21.63	5	187.38	48	3	7	24.46	5	165.72	39	3	7	27.37	6	148.07	32	3
8	21.68	6	186.90	48	2	8	24.51	6	165.33	39	2	8	27.43	6	147.75	32	2
9	21.74	6	186.42	48	1	9	24.57	6	164.94	38	1	9	27.49	6	147.43	31	1
42 0	21.80		185.94		158 0	47 0	24.63		164.56		153 0	52 0	27.55		147.12		148 0
		5		47				6		39				6		32	
1	21.85	6	185.47	48	9	1	24.69	5	164.17	38	9	1	27.61	6	146.80	32	9
2	21.91	5	184.99	47	8	2	24.74	6	163.79	38	8	2	27.67	6	146.48	31	8
3	21.96	6	184.52	47	7	3	24.80	6	163.41	38	7	3	27.73	6	146.17	31	7
4	22.02	6	184.05	46	6	4	24.86	6	163.03	38	6	4	27.79	6	145.86	32	6
5	22.08		183.59		5	5	24.92		162.65		5	5	27.85		145.54		5
		5		47				5		37				6		31	
6	22.13	6	183.12	46	4	6	24.97	6	162.28	37	4	6	27.91	6	145.23	31	4
7	22.19	5	182.66	46	3	7	25.03	6	161.91	38	3	7	27.97	6	144.92	31	3
8	22.24	6	182.20	46	2	8	25.09	6	161.53	37	2	8	28.03	5	144.61	30	2
9	22.30	6	181.74	46	1	9	25.15	6	161.16	37	1	9	28.08	6	144.31	31	1
43 0	22.36		181.28		157 0	48 0	25.21		160.79		152 0	53 0	28.14		144.00		147 0
		5		45				5		37				6		30	
1	22.41	6	180.83	45	9	1	25.26	6	160.42	36	9	1	28.20	6	143.70	31	9
2	22.47	6	180.38	45	8	2	25.32	6	160.06	37	8	2	28.26	6	143.39	30	8
3	22.53	5	179.93	45	7	3	25.38	6	159.69	36	7	3	28.32	6	143.09	30	7
4	22.58	6	179.48	45	6	4	25.44	6	159.33	36	6	4	28.38	6	142.79	30	6
5	22.64		179.03		5	5	25.50		158.97		5	5	28.44		142.49		5
		5		44				5		37				6		30	
6	22.69	6	178.59	45	4	6	25.55	6	158.60	36	4	9	28.50	6	142.19	30	4
7	22.75	5	178.14	44	3	7	25.61	6	158.24	35	3	7	28.56	6	141.89	30	3
8	22.80	6	177.70	44	2	8	25.67	6	157.89	36	2	8	28.62	6	141.59	30	2
9	22.86	6	177.26	43	1	9	25.73	6	157.53	35	1	9	28.68	6	141.29	29	1
44 0	22.92		176.83		156 0	49 0	25.79		157.18		151 0	54 0	28.74		141.00		146 0
		6		44				5		36				6		30	
1	22.98	5	176.39	43	9	1	25.84	6	156.82	35	9	1	28.80	6	140.70	29	9
2	23.03	6	175.96	43	8	2	25.90	6	156.47	35	8	2	28.86	6	140.41	30	8
3	23.09	6	175.53	43	7	3	25.96	6	156.12	35	7	3	28.92	7	140.11	29	7
4	23.15	5	175.10	43	6	4	26.02	6	155.77	35	6	4	28.99	6	139.82	29	6
5	23.20		174.67		5	5	26.08		155.42		5	5	29.05		139.53		5
		6		42				6		35				6		29	
6	23.26	6	174.25	43	4	6	26.14	5	155.07	35	4	6	29.11	6	139.24	29	4
7	23.32	5	173.82	42	3	7	26.19	[illegible]	154.72	34	3	7	29.17	6	138.95	28	3
8	23.37	6	173.40	42	2	8	26.25	6	154.38	34	2	8	29.23	6	138.67	29	2
9	23.43	6	172.98	42	1	9	26.31	[illegible]	154.04	35	1	9	29.29	6	138.38	29	1
45 0	23.49		172.56		155 0	50 0	26.37		153.69		150 0	55 0	29.35		138.09		145 0
	Cot.		Tang.		Angle.		Cot		Tang.		Angle.		Cot.		Tang.		Angle.

TABLE I. Argument, *Angle à réduire.*

Angle.		Tang	D.	Cotang.	Diff.		
			6		24		
55°	1	29"41		137"81		144°	9
	2	29.47	6	137.53	28		8
	3	29.53	6	137.24	29		7
	4	29.59	6	136.96	28		6
	5	29.65	6	136.68	28		5
			6		28		
	6	29.71		136.40			4
	7	29.77	6	136.12	28		3
	8	29.84	7	135.84	28		2
	9	29.90	6	135.56	28		1
56	0	29.96	6	135.29	27	144	0
			6		28		
	1	30.02		135.01			9
	2	30.08	6	134.74	27		8
	3	30.14	6	134.47	27		7
	4	30.20	6	134.19	28		6
	5	30.26	6	133.92	27		5
			6		27		
	6	30.32		133.65			4
	7	30.39	7	133.38	27		3
	8	30.45	6	133.11	27		2
	9	30.51	6	132.84	27		1
57	0	30.57	6	132.58	26	143	0
			6		27		
	1	30.63		132.31			9
	2	30.69	6	132.04	27		8
	3	30.75	6	131.78	26		7
	4	30.82	7	131.52	26		6
	5	30.88	6	131.25	27		5
			6		26		
	6	30.94		130.99			4
	7	31.00	6	130.73	26		3
	8	31.06	6	130.47	26		2
	9	31.13	7	130.21	26		1
58	0	31.19	6	129.95	26	142	0
			6		26		
	1	31.25		129.69			9
	2	31.31	6	129.44	25		8
	3	31.37	6	129.18	26		7
	4	31.44	7	128.92	26		6
	5	31.50	6	128.67	25		5
			6		26		
	6	31.56		128.41			4
	7	31.62	6	128.16	25		3
	8	31.69	7	127.91	25		2
	9	31.75	6	127.66	25		1
59	0	31.81	6	127.41	25	141	0
			6		25		
	1	31.87		127.16			9
	2	31.94	7	126.91	25		8
	3	32.00	6	126.66	25		7
	4	32.06	6	126.41	25		6
	5	32.12	6	126.17	24		5
			7		25		
	6	32.19		125.92			4
	7	32.25	6	125.68	24		3
	8	32.31	6	125.43	25		2
	9	32.37	6	125.19	24		1
60	0	32.44	7	124.94	25	140	0
		Cot.		Tang.		Angle.	

Angle.		Tang	D.	Cotang.	Diff.		
			6		24		
60°	1	32"50		124"70		139°	9
	2	32.56	6	124.46	24		8
	3	32.63	7	124.22	24		7
	4	32.69	6	123.98	24		6
	5	32.75	6	123.74	24		5
			6		24		
	6	32.81		123.50			4
	7	32.88	7	123.27	23		3
	8	32.94	6	123.03	24		2
	9	33.01	7	122.79	24		1
61	0	33.07	6	122.55	24	139	0
			6		23		
	1	33.13		122.32			9
	2	33.20	7	122.09	23		8
	3	33.26	6	121.85	24		7
	4	33.32	6	121.62	23		6
	5	33.39	7	121.39	23		5
			6		23		
	6	33.45		121.16			4
	7	33.52	7	120.93	23		3
	8	33.58	6	120.70	23		2
	9	33.64	6	120.47	23		1
62	0	33.70	6	120.24	23	138	0
			7		23		
	1	33.77		120.01			9
	2	33.84	7	119.78	23		8
	3	33.90	6	119.55	23		7
	4	33.96	6	119.33	22		6
	5	34.03	7	119.10	23		5
			6		22		
	6	34.09		118.88			4
	7	34.16	7	118.65	23		3
	8	34.22	6	118.43	22		2
	9	34.29	7	118.21	22		1
63	0	34.35	6	117.99	22	137	0
			6		23		
	1	34.41		117.76			9
	2	34.47	6	117.54	22		8
	3	34.54	7	117.32	22		7
	4	34.61	7	117.10	22		6
	5	34.67	6	116.89	21		5
			6		22		
	6	34.73		116.67			4
	7	34.80	7	116.45	22		3
	8	34.87	7	116.23	22		2
	9	34.93	6	116.02	21		1
64	0	35.00	7	115.80	22	136	0
			6		21		
	1	35.06		115.59			9
	2	35.13	7	115.37	22		8
	3	35.19	6	115.16	21		7
	4	35.26	7	114.94	22		6
	5	35.32	6	114.73	21		5
			7		21		
	6	35.39		114.52			4
	7	35.46	7	114.31	21		3
	8	35.52	6	114.10	21		2
	9	35.59	7	113.89	21		1
65	0	35.65	6	113.68	21	135	0
		Cot.		Tang.		Angle.	

Aogle.		Tang.	D.	Cotang.	Diff.		
			7		21		
65°	1	35"72		113"47		134	9
	2	35.78	6	113.26	21		8
	3	35.85	7	113.05	21		7
	4	35.92	7	112.84	21		6
	5	35.98	6	112.64	20		5
			7		21		
	6	36.05		112.43			4
	7	36.11	6	112.23	20		3
	8	36.18	7	112.02	21		2
	9	36.25	7	111.82	20		1
66	0	36.31	6	111.61	21	134	0
			7		20		
	1	36.38		111.41			9
	2	36.44	6	111.21	20		8
	3	36.51	7	111.00	21		7
	4	36.58	7	110.80	20		6
	5	36.64	6	110.60	20		5
			7		20		
	6	36.71		110.40			4
	7	36.78	7	110.20	20		3
	8	36.84	6	110.00	20		2
	9	36.91	7	109.80	20		1
67	0	36.98	7	109.60	20	133	0
			6		19		
	1	37.04		109.41			9
	2	37.11	7	109.21	20		8
	3	37.18	7	109.01	20		7
	4	37.25	7	108.81	20		6
	5	37.31	6	108.62	19		5
			7		20		
	6	37.38		108.42			4
	7	37.45	7	108.23	19		3
	8	37.51	6	108.03	20		2
	9	37.58	7	107.84	19		1
68	0	37.65	7	107.65	19	132	0
			7		20		
	1	37.72		107.45			9
	2	37.78	6	107.26	19		8
	3	37.85	7	107.07	19		7
	4	37.92	7	106.88	19		6
	5	37.99	7	106.69	19		5
			7		19		
	6	38.06		106.50			4
	7	38.12	6	106.31	19		3
	8	38.19	7	106.12	19		2
	9	38.26	7	105.93	19		1
69	0	38.33	7	105.74	19	131	0
			7		19		
	1	38.40		105.55			9
	2	38.46	6	105.37	18		8
	3	38.53	7	105.18	19		7
	4	38.60	7	104.99	19		6
	5	38.67	7	104.80	19		5
			7		18		
	6	38.74		104.62			4
	7	38.81	7	104.44	18		3
	8	38.87	6	104.25	19		2
	9	38.94	7	104.07	18		1
70	0	39.01	7	103.89	18	130	0
		Cot.		Tang.		Angle.	

TABLE I. Argument, *Angle à réduire.*

Angle.		Tang.	D.	Cotang.	Diff.		
70°	1	39"08	7	103"70	19	129°	9
	2	39.15	7	103.52	18		8
	3	39.22	7	103.34	18		7
	4	39.29	7	103.16	18		6
	5	39.36	7	102.98	18		5
			7		18		
	6	39.43		102.80			4
	7	39.50	7	102.62	18		3
	8	39.56	6	102.44	18		2
	9	39.63	7	102.26	18		1
71	0	39.70	7	102.08	18	129	0
			7		18		
	1	39.77		101.90			9
	2	39.84	7	101.72	18		8
	3	39.91	7	101.54	18		7
	4	39.98	7	101.36	18		6
	5	40.05	7	101.19	17		5
			7		17		
	6	40.12		101.02			4
	7	40.19	7	100.84	18		3
	8	40.26	7	100.66	18		2
	9	40.33	7	100.49	17		1
72	0	40.40	7	100.32	17	128	0
			7		18		
	1	40.47		100.14			9
	2	40.54	7	99.97	17		8
	3	40.61	7	99.79	18		7
	4	40.68	7	99.62	17		6
	5	40.75	7	99.45	17		5
			7		17		
	6	40.82		99.28			4
	7	40.89	7	99.11	17		3
	8	40.96	7	98.94	17		2
	9	41.04	8	98.77	17		1
73	0	41.11	7	98.60	17	127	0
			7		17		
	1	41.18		98.43			9
	2	41.25	7	98.26	17		8
	3	41.32	7	98.09	17		7
	4	41.39	7	97.92	17		6
	5	41.46	7	97.75	17		5
			7		17		
	6	41.53		97.58			4
	7	41.60	7	97.42	16		3
	8	41.68	8	97.25	17		2
	9	41.75	7	97.08	17		1
74	0	41.82	7	96.92	16	126	0
			7		17		
	1	41.89		96.75			9
	2	41.96	7	96.59	16		8
	3	42.03	7	96.42	17		7
	4	42.10	7	96.26	16		6
	5	42.18	8	96.09	17		5
			7		16		
	6	42.25		95.93			4
	7	42.32	7	95.76	17		3
	8	42.39	7	95.60	16		2
	9	42.47	8	95.44	16		1
75	0	42.54	7	95.28	16	125	0
		Cot.		Tang.		Angle.	

Angle.		Tang.	D.	Cotang.	Diff.		
75°	1	42"61	7	95"12	16	124°	9
	2	42.68	7	94.95	17		8
	3	42.75	7	94.79	16		7
	4	42.83	8	94.63	16		6
	5	42.90	7	94.47	16		5
			7		16		
	6	42.97		94.31			4
	7	43.05	8	94.15	16		3
	8	43.12	7	93.99	16		2
	9	43.19	7	93.83	16		1
76	0	43.26	7	93.68	15	124	0
			8		16		
	1	43.34		93.52			9
	2	43.41	7	93.36	16		8
	3	43.49	8	93.20	16		7
	4	43.56	7	93.05	15		6
	5	43.63	7	92.89	16		5
			7		16		
	6	43.70		92.73			4
	7	43.78	8	92.58	15		3
	8	43.85	7	92.42	16		2
	9	43.93	8	92.27	15		1
77	0	44.00	7	92.11	16	123	0
			7		15		
	1	44.07		91.96			9
	2	44.15	8	91.80	16		8
	3	44.22	7	91.65	15		7
	4	44.30	8	91.50	15		6
	5	44.37	7	91.34	16		5
			7		15		
	6	44.44		91.19			4
	7	44.52	8	91.04	15		3
	8	44.59	7	90.89	15		2
	9	44.67	8	90.73	16		1
78	0	44.74	7	90.58	15	122	0
			8		15		
	1	44.82		90.43			9
	2	44.89	7	90.28	15		8
	3	44.97	8	90.13	15		7
	4	45.04	7	89.98	15		6
	5	45.12	8	89.83	15		5
			7		15		
	6	45.19		89.68			4
	7	45.27	8	89.53	15		3
	8	45.34	7	89.38	15		2
	9	45.42	8	89.24	14		1
79	0	45.49	7	89.09	15	121	0
			8		15		
	1	45.57		88.94			9
	2	45.64	7	88.79	15		8
	3	45.72	8	88.64	15		7
	4	45.80	8	88.50	14		6
	5	45.87	7	88.35	15		5
			8		15		
	6	45.95		88.20			4
	7	46.02	7	88.06	14		3
	8	46.10	8	87.91	15		2
	9	46.18	8	87.77	14		1
80	0	46.25	7	87.62	15	120	0
		Cot.		Tang.		Angle.	

Angle.		Tang.	D.	Cotang.	Diff.		
80°	1	46"33	8	87"48	14	119°	9
	2	46.41	8	87.33	15		8
	3	46.48	7	87.19	14		7
	4	46.56	8	87.05	14		6
	5	46.64	8	86.90	15		5
			7		14		
	6	46.71		86.76			4
	7	46.79	8	86.62	14		3
	8	46.87	8	86.48	14		2
	9	46.94	7	86.33	15		1
81	0	47.02	8	86.19	14	119	0
			8		14		
	1	47.10		86.05			9
	2	47.18	8	85.91	14		8
	3	47.25	7	85.77	14		7
	4	47.33	8	85.63	14		6
	5	47.41	8	85.49	14		5
			8		14		
	6	47.49		85.35			4
	7	47.56	7	85.21	14		3
	8	47.64	8	85.07	14		2
	9	47.72	8	84.93	14		1
82	0	47.80	8	84.79	14	118	0
			8		14		
	1	47.88		84.65			9
	2	47.96	8	84.51	14		8
	3	48.03	7	84.37	14		7
	4	48.11	8	84.24	13		6
	5	48.19	8	84.10	14		5
			8		14		
	6	48.27		83.96			4
	7	48.35	8	83.83	13		3
	8	48.43	8	83.69	14		2
	9	48.51	8	83.55	14		1
83	0	48.59	8	83.42	13	117	0
			7		14		
	1	48.66		83.28			9
	2	48.74	8	83.15	13		8
	3	48.82	8	83.01	14		7
	4	48.90	8	82.88	13		6
	5	48.98	8	82.74	14		5
			8		13		
	6	49.06		82.61			4
	7	49.14	8	82.47	14		3
	8	49.22	8	82.34	13		2
	9	49.30	8	82.21	13		1
84	0	49.38	8	82.07	14	116	0
			8		13		
	1	49.46		81.94			9
	2	49.54	8	81.81	13		8
	3	49.62	8	81.67	14		7
	4	49.70	8	81.54	13		6
	5	49.78	8	81.41	13		5
			8		13		
	6	49.86		81.28			4
	7	49.95	8	81.15	13		3
	8	50.03	9	81.02	13		2
	9	50.11	8	80.89	13		1
85	0	50.19	8	80.75	14	115	0
		Cot.		Tang.		Angle.	

TABLE I. Argument ; *Angle à réduire.*

Angle.	Tang	D.	Cotang.	Diff		Angle.	Tang.	D.	Cotang.	Diff		Angle.	Tang	D.	Cotang.	Diff	
85° 1	50"27	8	80"62	13	114° 9	90° 1	54"46	9	74"42	12	109° 9	95° 1	58"94	9	68"76	11	104° 9
2	50.35	8	80.49	13	8	2	54.55	9	74.30	12	8	2	59.03	9	68.65	11	8
3	50.43	8	80.36	13	7	3	54.63	8	74.19	11	7	3	59.13	10	68.54	11	7
4	50.51	8	80.24	12	6	4	54.72	9	74.07	12	6	4	59.22	9	68.44	10	6
5	50.59	8	80.11	13	5	5	54.81	9	73.95	12	5	5	59.31	9	68.33	11	5
6	50.68	9	79.98	13	4	6	54.89	8	73.83	12	4	6	59.41	10	68.22	11	4
7	50.76	8	79.85	13	3	7	54.98	9	73.71	12	3	7	59.50	9	68.11	11	3
8	50.84	8	79.72	13	2	8	55.07	9	73.60	11	2	8	59.59	9	68.00	11	2
9	50.92	8	79.59	13	1	9	55.16	9	73.48	12	1	9	59.69	10	67.90	10	1
86 0	51.00	8	79.46	13	114 0	91 0	55.24	8	73.36	12	109 0	96 0	59.78	9	67.79	11	104 0
1	51.09	9	79.34	12	9	1	55.33	9	73.25	11	9	1	59.88	10	67.69	10	9
2	51.17	8	79.21	13	8	2	55.42	9	73.13	12	8	2	59.97	9	67.58	11	8
3	51.25	8	79.08	13	7	3	55.51	9	73.02	11	7	3	60.07	10	67.47	11	7
4	51.33	8	78.95	13	6	4	55.59	8	72.90	12	6	4	60.16	9	67.36	11	6
5	51.42	9	78.83	12	5	5	55.68	9	72.78	12	5	5	60.25	9	67.26	10	5
6	51.50	8	78.70	13	4	6	55.77	9	72.67	11	4	6	60.35	10	67.16	10	4
7	51.58	8	78.57	13	3	7	55.86	9	72.55	12	3	7	60.44	9	67.05	11	3
8	51.66	8	78.45	12	2	8	55.95	9	72.44	11	2	8	60.54	10	66.95	10	2
9	51.75	9	78.32	13	1	9	56.04	9	72.32	12	1	9	60.64	10	66.84	11	1
87 0	51.83	8	78.20	12	113 0	92 0	56.13	9	72.21	11	108 0	97 0	60.73	9	66.73	11	103 0
1	51.91	8	78.07	13	9	1	56.21	8	72.10	11	9	1	60.83	10	66.63	10	9
2	52.00	9	77.95	12	8	2	56.30	9	71.98	12	8	2	60.92	9	66.52	11	8
3	52.08	8	77.82	13	7	3	56.39	9	71.87	11	7	3	61.02	10	66.42	10	7
4	52.16	8	77.70	12	6	4	56.48	9	71.76	11	6	4	61.11	9	66.32	10	6
5	52.25	9	77.57	13	5	5	56.57	9	71.64	12	5	5	61.21	10	66.21	11	5
6	52.33	8	77.45	12	4	6	56.66	9	71.52	12	4	6	61.31	10	66.11	10	4
7	52.41	8	77.32	13	3	7	56.75	9	71.41	11	3	7	61.40	9	66.00	11	3
8	52.50	9	77.20	12	2	8	56.84	9	71.30	11	2	8	61.50	10	65.90	10	2
9	52.58	8	77.08	12	1	9	56.93	9	71.19	11	1	9	61.60	10	65.80	10	1
88 0	52.67	9	76.96	12	112 0	93 0	57.02	9	71.08	11	107 0	98 0	61.69	9	65.69	11	102 0
1	52.75	8	76.83	13	9	1	57.11	9	70.96	12	9	1	61.79	10	65.59	10	9
2	52.83	8	76.71	12	8	2	57.20	9	70.85	11	8	2	61.89	10	65.49	10	8
3	52.92	9	76.59	12	7	3	57.29	9	70.74	11	7	3	61.98	9	65.38	11	7
4	53.00	8	76.46	13	6	4	57.38	9	70.63	11	6	4	62.08	10	65.28	10	6
5	53.09	9	76.34	12	5	5	57.47	9	70.52	11	5	5	62.18	10	65.18	10	5
6	53.17	8	76.22	12	4	6	57.56	9	70.41	11	4	6	62.28	10	65.08	10	4
7	53.26	9	76.10	12	3	7	57.65	9	70.30	11	3	7	62.38	10	64.98	10	3
8	53.34	8	75.98	12	2	8	57.75	10	70.18	12	2	8	62.47	9	64.87	11	2
9	53.43	9	75.86	12	1	9	57.84	9	70.07	11	1	9	62.57	10	64.77	10	1
89 0	53.51	8	75.73	13	111 0	94 0	57.93	9	69.96	11	106 0	99 0	62.67	10	64.67	10	101 0
1	53.60	9	75.61	12	9	1	58.02	9	69.85	11	9	1	62.77	10	64.57	10	9
2	53.68	8	75.49	12	8	2	58.11	9	69.74	11	8	2	62.87	10	64.47	10	8
3	53.77	9	75.37	12	7	3	58.20	9	69.63	11	7	3	62.97	10	64.37	10	7
4	53.86	9	75.25	12	6	4	58.29	9	69.52	11	6	4	63.06	9	64.27	10	6
5	53.94	8	75.13	12	5	5	58.39	10	69.41	11	5	5	63.16	10	64.16	11	5
6	54.03	9	75.01	12	4	6	58.48	9	69.30	11	4	6	63.26	10	64.06	10	4
7	54.11	8	74.90	11	3	7	58.57	9	69.20	10	3	7	63.36	10	63.96	10	3
8	54.20	9	74.78	12	2	8	58.66	9	69.09	11	2	8	63.46	10	63.86	10	2
9	54.29	9	74.66	12	1	9	58.76	10	68.98	11	1	9	63.56	10	63.76	10	1
90 0	54.37	8	74.54	12	110 0	95 0	58.85	9	68.87	11	105 0	100 0	63.66	10	63.66	10	100 0
	Cot.		Tang.		Angle.		Cot.		Tang.		Angle.		Cot.		Taog.		Angle.

TABLE II.

ARGUMENS $(H \pm H')$, $(P \pm P')$.

Pour réduire à l'horizon un angle observé dans un plan incliné, prenez dans cette table un nombre avec l'argument $(H + H')$, et puis un second nombre avec l'argument $(H - H')$.

Pour réduire l'angle horizontal ou sphérique à l'angle des cordes, prenez dans la même Table un premier nombre avec l'argument $(P + P')$, et un second avec l'argument $(P - P')$.

Centigr.	0G	Diff.	1G	Diff.	2G	Diff.	3G	Diff.	4G	Diff.	5G	Diff.
1'	0.000		0.629	12	2.492	25	5.588	37	9.915	49	15.476	62
2	0.000	0	0.641	12	2.517	25	5.625	37	9.965	50	15.538	62
3	0.001	1	0.654	13	2.542	25	5.662	37	10.015	50	15.600	62
4	0.001	0	0.667	13	2.567	25	5.699	37	10.065	50	15.662	62
5	0.002	1	0.680	13	2.592	25	5.737	38	10.115	50	15.724	62
		0		13		25		38		50		62
6	0.002		0.693		2.617		5.775		10.165		15.786	
7	0.003	1	0.706	13	2.642	25	5.813	38	10.215	50	15.848	62
8	0.004	1	0.719	13	2.668	26	5.851	38	10.265	50	15.910	62
9	0.005	1	0.732	13	2.694	26	5.889	38	10.315	50	15.973	63
10	0.006	1	0.746	14	2.720	26	5.927	38	10.365	50	16.036	63
		2		14		26		38		51		63
11	0.008		0.760		2.746		5.965		10.416		16.099	
12	0.009	1	0.774	14	2.772	26	6.003	38	10.467	51	16.162	63
13	0.010	1	0.788	14	2.798	26	6.042	39	10.518	51	16.225	63
14	0.012	2	0.802	14	2.824	26	6.081	39	10.569	51	16.288	63
15	0.014	2	0.816	14	2.850	26	6.120	39	10.620	51	16.351	63
		2		14		27		39		51		63
16	0.016		0.830		2.877		6.159		10.671		16.414	
17	0.018	2	0.844	14	2.904	27	6.198	39	10.722	51	16.478	64
18	0.020	2	0.858	14	2.931	27	6.237	39	10.774	52	16.542	64
19	0.022	2	0.873	15	2.958	27	6.276	39	10.826	52	16.606	64
20	0.024	2	0.888	15	2.985	27	6.315	39	10.878	52	16.670	64
		3		15		27		39		52		64
21	0.027		0.903		3.012		6.354		10.930		16.734	
22	0.030	3	0.918	15	3.039	27	6.394	40	10.982	52	16.798	64
23	0.033	3	0.933	15	3.067	28	6.434	40	11.034	52	16.862	64
24	0.036	3	0.948	15	3.095	28	6.474	40	11.086	52	16.927	65
25	0.039	3	0.963	15	3.123	28	6.514	40	11.138	52	16.992	65
		3		16		28		40		52		65
26	0.042		0.979		3.151		6.554		11.190		17.057	
27	0.045	3	0.995	16	3.179	28	6.594	40	11.242	52	17.122	65
28	0.048	3	1.011	16	3.207	28	6.634	40	11.295	53	17.187	65
29	0.052	4	1.027	16	3.235	28	6.675	41	11.348	53	17.252	65
30	0.056	4	1.043	16	3.263	28	6.716	41	11.401	53	17.317	65
		4		16		28		41		53		65
31	0.060		1.059		3.291		6.757		11.454		17.382	
32	0.064	4	1.075	16	3.319	28	6.798	41	11.507	53	17.448	66
33	0.068	4	1.091	16	3.348	29	6.839	41	11.560	53	17.514	66
34	0.072	4	1.107	16	3.377	29	6.880	41	11.614	54	17.580	66
35	0.076	4	1.124	17	3.406	29	6.921	41	11.668	54	17.646	66
		4		17		29		41		54		66
36	0.080		1.141		3.435		6.962		11.722		17.712	
37	0.084	4	1.158	17	3.464	29	7.004	42	11.776	54	17.778	66
38	0.089	5	1.175	17	3.493	29	7.046	42	11.830	54	17.844	66
39	0.094	5	1.192	17	3.523	30	7.088	42	11.884	54	17.910	66
40	0.099	5	1.209	17	3.553	30	7.130	42	11.938	54	17.976	66

TABLE II. Argumens, $(H \pm H')$, $(P \pm P')$.

Centigr.	0°	Diff.	1°	Diff.	2°	Diff.	3°	Diff.	4°	Diff.	5°	Diff.
41'	0.104	5	1.226	17	3.582	30	7.172	42	11.992	54	18.043	67
42	0.109	5	1.243	17	3.612	30	7.214	42	12.046	54	18.110	67
43	0.114	5	1.261	18	3.642	30	7.256	42	12.100	54	18.177	67
44	0.119	5	1.279	18	3.672	30	7.298	42	12.155	55	18.244	67
45	0.124	5	1.297	18	3.702	30	7.340	42	12.210	55	18.311	67
46	0.130	6	1.315	18	3.732	30	7.383	43	12.265	55	18.378	67
47	0.136	6	1.333	18	3.762	30	7.426	43	12.320	55	18.445	67
48	0.142	6	1.351	18	3.792	30	7.469	43	12.375	55	18.512	67
49	0.148	6	1.369	18	3.823	31	7.512	43	12.430	55	18.580	68
50	0.154	6	1.387	18	3.854	31	7.555	43	12.486	56	18.648	68
51	0.160	6	1.406	19	3.885	31	7.598	43	12.542	56	18.716	68
52	0.166	6	1.425	19	3.916	31	7.641	43	12.598	56	18.784	68
53	0.173	7	1.444	19	3.947	31	7.684	43	12.654	56	18.852	68
54	0.180	7	1.463	19	3.978	31	7.728	44	12.710	56	18.920	68
55	0.187	7	1.482	19	4.010	32	7.772	44	12.766	56	18.988	68
56	0.194	7	1.501	19	4.042	32	7.816	44	12.822	56	19.057	69
57	0.201	7	1.520	19	4.074	32	7.860	44	12.878	56	19.126	69
58	0.208	7	1.539	19	4.106	32	7.904	44	12.934	56	19.195	69
59	0.215	7	1.559	20	4.138	32	7.948	44	12.990	56	19.264	69
60	0.222	7	1.579	20	4.170	32	7.992	44	13.047	57	19.333	69
61	0.229	7	1.599	20	4.202	32	8.036	44	13.104	57	19.402	69
62	0.237	8	1.619	20	4.234	32	8.081	45	13.161	57	19.471	69
63	0.245	8	1.639	20	4.266	32	8.126	45	13.218	57	19.540	69
64	0.253	8	1.659	20	4.299	33	8.171	45	13.275	57	19.609	69
65	0.261	8	1.679	20	4.332	33	8.216	45	13.332	57	19.679	70
66	0.269	8	1.699	20	4.365	33	8.261	45	13.389	57	19.749	70
67	0.277	8	1.720	21	4.398	33	8.306	45	13.446	57	19.819	70
68	0.285	8	1.741	21	4.431	33	8.351	45	13.504	58	19.889	70
69	0.293	8	1.762	21	4.464	33	8.396	45	13.562	58	19.959	70
70	0.302	9	1.783	21	4.497	33	8.442	46	13.620	58	20.029	70
71	0.311	9	1.804	21	4.530	33	8.488	46	13.678	58	20.099	70
72	0.320	9	1.825	21	4.563	33	8.534	46	13.736	58	20.169	70
73	0.329	9	1.846	21	4.596	33	8.580	46	13.794	58	20.240	71
74	0.338	9	1.867	21	4.630	34	8.626	46	13.852	58	20.311	71
75	0.347	9	1.889	22	4.664	34	8.672	46	13.911	58	20.382	71
76	0.356	9	1.911	22	4.698	34	8.718	46	13.970	59	20.453	71
77	0.365	9	1.933	22	4.732	34	8.764	46	14.029	59	20.524	71
78	0.375	10	1.955	22	4.766	34	8.811	47	14.088	59	20.595	71
79	0.385	10	1.977	22	4.800	34	8.858	47	14.147	59	20.666	71
80	0.395	10	1.999	22	4.835	35	8.905	47	14.206	59	20.737	71
81	0.405	10	2.021	22	4.870	35	8.952	47	14.265	59	20.808	71
82	0.415	10	2.043	22	4.905	35	8.999	47	14.324	59	20.880	72
83	0.425	10	2.065	22	4.940	35	9.046	47	14.383	59	20.952	72
84	0.435	10	2.088	23	4.975	35	9.093	47	14.443	60	21.024	72
85	0.445	10	2.111	23	5.010	35	9.140	47	14.503	60	21.096	72
86	0.456	11	2.134	23	5.045	35	9.188	48	14.563	60	21.168	72
87	0.467	11	2.157	23	5.080	35	9.236	48	14.623	60	21.240	72
88	0.478	11	2.180	23	5.116	36	9.284	48	14.683	60	21.312	72
89	0.489	11	2.203	23	5.152	36	9.332	48	14.743	60	21.384	72
90	0.500	11	2.226	23	5.188	36	9.380	48	14.803	60	21.456	72
91	0.511	11	2.250	24	5.224	36	9.428	48	14.863	60	21.529	73
92	0.522	11	2.274	24	5.260	36	9.476	48	14.924	61	21.602	73
93	0.533	11	2.298	24	5.296	36	9.524	48	14.985	61	21.675	73
94	0.545	12	2.322	24	5.332	36	9.572	48	15.046	61	21.748	73
95	0.557	12	2.346	24	5.368	36	9.621	49	15.107	61	21.821	73
96	0.569	12	2.370	24	5.404	36	9.670	49	15.168	61	21.895	74
97	0.581	12	2.394	24	5.440	36	9.719	49	15.229	61	21.969	74
98	0.593	12	2.418	24	5.477	37	9.768	49	15.290	61	22.043	74
99	0.605	12	2.442	24	5.514	37	9.817	49	15.352	62	22.117	74
100	0.617	12	2.467	25	5.551	37	9.866	49	15.414	62	22.191	74

TABLE III.

CONVERSION DES COTÉS EN ARCS,

OU

VALEURS DU FACTEUR $\frac{1}{\rho \sin 1''}\left(1-\frac{1}{2}e^2\sin^2 L\right)$;

Argument, *Latitude et côté en mètres.*

lat.	LOGARIT. du facteur.	D.	10m	D	20m	D	30m	D	40m	D	50m	D	60m	D	70m	D	80m	D	90m
31	8.9990683	172	0″99786	4	1″99571	8	2″99357	12	3″99143	16	4″98928	19	5″98714	24	6″98500	28	7″98286	32	8″98071
32	8.9990511	173	0.99782	4	1.99563	8	2.99345	12	3.99127	16	4.98909	20	5.98690	23	6.98472	28	7.98254	32	8.98035
33	8.9990338	176	0.99778	4	1.99555	8	2.99333	12	3.99111	16	4.98889	20	5.98666	24	6.98444	28	7.98222	32	8.97999
34	8.9990162	181	0.99774	4	1.99547	8	2.99321	12	3.99095	17	4.98869	21	5.98642	25	6.98416	29	7.98190	33	8.97963
35	8.9989981		0.99770		1.99539		2.99309		3.99078		4.98848		5.98617		6.98387		7.98157		8.97926
		183		5		8		13		16		21		25		29		34	
36	8.9989798	185	0.99765	4	1.99531	9	2.99296	13	3.99062	17	4.98827	21	5.98592	25	6.98358	30	7.98123	34	8.97888
37	8.9989613	188	0.99761	4	1.99522	8	2.99283	13	3.99045	18	4.98806	22	5.98567	26	6.98328	30	7.98089	35	8.97850
38	8.9989425	190	0.99757	5	1.99514	9	2.99270	13	3.99027	17	4.98784	22	5.98541	26	6.98298	31	7.98054	35	8.97811
39	8.9989235	193	0.99752	4	1.99505	9	2.99257	13	3.99010	18	4.98762	22	5.98515	27	6.98267	31	7.98019	35	8.97772
40	8.9989042		0.99748		1.99496		2.99244		3.98992		4.98740		5.98488		6.98236		7.97984		8.97732
		195		4		9		13		18		22		27		31		36	
41	8.9988847	196	0.99744	4	1.99487	9	2.99231	14	3.98974	18	4.98718	23	5.98461	27	6.98205	32	7.97948	36	8.97691
42	8.9988651	196	0.99740	5	1.99478	9	2.99217	13	3.98956	18	4.98695	22	5.98434	27	6.98173	32	7.97912	36	8.97651
43	8.9988455	199	0.99735	5	1.99469	9	2.99204	14	3.98938	18	4.98673	23	5.98407	27	6.98141	32	7.97876	37	8.97611
44	8.9988256	202	0.99730	5	1.99460	9	2.99190	14	3.98920	19	4.98650	23	5.98380	28	6.98109	32	7.97839	36	8.97570
45	8.9988054		0.99725		1.99451		2.99176		3.98901		4.98627		5.98352		6.98077		7.97803		8.97528
		202		4		10		14		18		24		28		32		37	
46	8.9987852	202	0.99721	5	1.99441	9	2.99162	14	3.98883	19	4.98603	23	5.98324	28	6.98045	33	7.97766	38	8.97486
47	8.9987650	203	0.99716	5	1.99432	9	2.99148	14	3.98864	18	4.98580	23	5.98296	28	6.98012	32	7.97728	37	8.97444
48	8.9987447	204	0.99711	4	1.99423	10	2.99134	14	3.98846	19	4.98557	24	5.98268	28	6.97980	33	7.97691	37	3.97402
49	8.9987243	204	0.99707	5	1.99413	9	2.99120	14	3.98827	19	4.98533	23	5.98240	28	6.97947	33	7.97654	38	8.97360
50	8.9987039		0.99702		1.99404		2.99106		3.98808		4.98510		5.98212		6.97914		7.97616		8.97318
		204		5		9		14		19		23		28		33		38	
51	8.9986835	203	0.99697	4	1.99395	10	2.99092	14	3.98789	18	4.98487	24	5.98184	28	6.97881	32	7.97578	37	8.97276
52	8.9986632	202	0.99693	5	1.99385	9	2.99078	14	3.98771	19	4.98463	23	5.98156	28	6.97849	33	7.97541	37	8.97234
53	8.9986430	202	0.99688	5	1.99376	9	2.99064	14	3.98752	18	4.98440	23	5.98128	28	6.97816	32	7.97504	37	8.97192
54	8.9986228	202	0.99683	4	1.99367	9	2.99050	14	3.98734	19	4.98417	23	5.98100	28	6.97784	33	7.97467	37	8.97151
55	8.9986026		0.99679		1.99358		2.99036		3.98715		4.98394		5.98072		6.97751		7.97430		8.97109
		201		5		10		13		18		23		27		32		37	
56	8.9985825	199	0.99674	4	1.99348	9	2.99023	14	3.98697	19	4.98371	23	5.98045	28	6.97719	32	7.97393	36	8.97067
57	8.9985626	198	0.99670	5	1.99339	9	2.99009	14	3.98678	18	4.98348	23	5.98017	27	6.97687	32	7.97357	37	8.97026
58	8.9985428	197	0.99665	4	1.99330	9	2.98995	13	3.98660	18	4.98326	22	5.97990	27	6.97655	31	7.97320	36	8.96985
59	8.9985231	195	0.99661	5	1.99321	9	2.98982	14	3.98642	18	4.98303	23	5.97963	27	6.97624	32	7.97284	36	8.96945
60	8.9985036		0.99656		1.99312		2.98968		3.98624		4.98280		5.97936		6.97592		7.97248		8.96904

TABLE IV.

Valeurs du facteur $\frac{1}{2}\sin^2 Z$, dans le terme $\frac{1}{2}\delta^2 \sin^2 Z \tang L$.

Argument, *Z* ou *Azimuth*.

Z = A ou 200 + A	½ sin² Z	D	Z = 100 + A ou 300 + A	Z = A ou 200 + A	½ sin² Z	D	Z = 100 + A ou 300 + A	Z = A ou 200 + A	½ sin² Z	D	Z = 100 + A ou 300 + A	Z = A ou 200 + A	½ sin² Z	D	Z = 100 + A ou 300 + A
0^G 1	0.00000		99° 9	5^G 1	0.00320	12	94^G 9	10° 1	0.01248	24	89° 9	15° 1	0.02761	36	84° 9
2	0.00000	0	8	2	0.00333	13	8	2	0.01273	25	8	2	0.02797	36	8
3	0.00001	1	7	3	0.00346	13	7	3	0.01297	24	7	3	0.02833	36	7
4	0.00002	1	6	4	0.00359	13	6	4	0.01323	26	6	4	0.02869	36	6
5	0.00003	1	5	5	0.00372	13	5	5	0.01348	25	5	5	0.02906	37	5
6	0.00004	1	4	6	0.00386	14	4	6	0.01373	25	4	6	0.02943	37	4
7	0.00006	2	3	7	0.00400	14	3	7	0.01399	26	3	7	0.02980	37	3
8	0.00008	2	2	8	0.00414	14	2	8	0.01425	26	2	8	0.03017	37	2
9	0.00010	2	1	9	0.00428	14	1	9	0.01451	26	1	9	0.03055	38	1
1 0	0.00012	2	99 0	6 0	0.00443	15	94 0	11 0	0.01478	27	89 0	16 0	0.03092	37	84 0
1	0.00015	3	9	1	0.00458	15	9	1	0.01505	27	9	1	0.03130	38	9
2	0.00018	3	8	2	0.00473	15	8	2	0.01532	27	8	2	0.03168	38	8
3	0.00021	3	7	3	0.00488	15	7	3	0.01559	27	7	3	0.03207	39	7
4	0.00024	3	6	4	0.00504	16	6	4	0.01586	27	6	4	0.03245	38	6
5	0.00028	4	5	5	0.00519	15	5	5	0.01614	28	5	5	0.03284	39	5
6	0.00032	4	4	6	0.00535	16	4	6	0.01642	28	4	6	0.03323	39	4
7	0.00036	4	3	7	0.00552	17	3	7	0.01670	28	3	7	0.03362	39	3
8	0.00040	4	2	8	0.00568	16	2	8	0.01698	28	2	8	0.03402	40	2
9	0.00045	5	1	9	0.00585	17	1	9	0.01727	29	1	9	0.03442	40	1
2 0	0.00049	4	98 0	7 0	0.00602	17	93 0	12 0	0.01757	30	88 0	17 0	0.03481	39	83 0
1	0.00054	5	9	1	0.00619	17	9	1	0.01785	28	9	1	0.03522	41	9
2	0.00060	6	8	2	0.00637	18	8	2	0.01814	29	8	2	0.03562	40	8
3	0.00065	5	7	3	0.00655	18	7	3	0.01843	29	7	3	0.03602	40	7
4	0.00071	6	6	4	0.00673	18	6	4	0.01873	30	6	4	0.03643	41	6
5	0.00077	6	5	5	0.00691	18	5	5	0.01903	30	5	5	0.03684	41	5
6	0.00083	6	4	6	0.00709	18	4	6	0.01933	30	4	6	0.03725	41	4
7	0.00090	7	3	7	0.00728	19	3	7	0.01964	31	3	7	0.03766	41	3
8	0.00097	7	2	8	0.00747	19	2	8	0.01994	30	2	8	0.03808	42	2
9	0.00104	7	1	9	0.00766	19	1	9	0.02025	31	1	9	0.03850	42	1
3 0	0.00111	7	97 0	8 0	0.00785	19	92 0	13 0	0.02056	31	87 0	18 0	0.03892	42	82 0
1	0.00118	7	9	1	0.00805	20	9	1	0.02087	31	9	1	0.03934	42	9
2	0.00126	8	8	2	0.00825	20	8	2	0.02119	32	8	2	0.03976	42	8
3	0.00134	8	7	3	0.00845	20	7	3	0.02151	32	7	3	0.04019	43	7
4	0.00142	8	6	4	0.00865	20	6	4	0.02183	32	6	4	0.04062	43	6
5	0.00151	9	5	5	0.00886	21	5	5	0.02215	32	5	5	0.04105	43	5
6	0.00160	9	4	6	0.00907	21	4	6	0.02247	32	4	6	0.04148	43	4
7	0.00169	9	3	7	0.00928	21	3	7	0.02280	33	3	7	0.04191	43	3
8	0.00178	9	2	8	0.00949	21	2	8	0.02313	33	2	8	0.04235	44	2
9	0.00187	9	1	9	0.00971	22	1	9	0.02346	33	1	9	0.04279	44	1
4 0	0.00197	10	96 0	9 0	0.00993	22	91 0	14 0	0.02379	33	86 0	19 0	0.04323	44	81 0
1	0.00207	10	9	1	0.01015	22	9	1	0.02413	34	9	1	0.04367	44	9
2	0.00217	10	8	2	0.01037	22	8	2	0.02447	34	8	2	0.04412	45	8
3	0.00228	11	7	3	0.01059	22	7	3	0.02481	34	7	3	0.04456	44	7
4	0.00238	10	6	4	0.01082	23	6	4	0.02515	34	6	4	0.04501	45	6
5	0.00249	11	5	5	0.01105	23	5	5	0.02549	34	5	5	0.04546	45	5
6	0.00261	12	4	6	0.01128	23	4	6	0.02584	35	4	6	0.04592	46	4
7	0.00272	11	3	7	0.01152	24	3	7	0.02618	34	3	7	0.04637	45	3
8	0.00284	12	2	8	0.01175	23	2	8	0.02654	36	2	8	0.04683	46	2
9	0.00296	12	1	9	0.01199	24	1	9	0.02689	35	1	9	0.04729	46	1
5 0	0.00308	12	95 0	10 0	0.01224	25	90 0	15 0	0.02725	36	85 0	20 0	0.04775	46	80 0

TABLE IV. Argument Z.

$Z=A$ ou $200+A$	$\frac{1}{2}\sin^2 Z$	D	$Z=100+A$ ou $300+A$	$Z=A$ ou $200+A$	$\frac{1}{2}\sin^2 Z$	D	$Z=100+A$ ou $300+A$	$Z=A$ ou $200+A$	$\frac{1}{2}\sin^2 Z$	D	$Z=100+A$ ou $300+A$	$Z=A$ ou $200+A$	$\frac{1}{2}\sin^2 Z$	D	$Z=100+A$ ou $300+A$
20° 1	0.04821	46	79° 9	25° 1	0.07378	56	74° 9	30° 1	0.10369	64	69° 9	35° 1	0.13720	70	64° 9
2	0.04867	46	8	2	0.07434	56	8	2	0.10433	64	8	2	0.13790	70	8
3	0.04914	47	7	3	0.07490	56	7	3	0.10497	64	7	3	0.13861	71	7
4	0.04961	47	6	4	0.07546	56	6	4	0.10561	64	6	4	0.13931	70	6
5	0.05008	47	5	5	0.07602	56	5	5	0.10625	64	5	5	0.14002	71	5
6	0.05055	47	4	6	0.07659	57	4	6	0.10689	64	4	6	0.14072	70	4
7	0.05103	48	3	7	0.07715	56	3	7	0.10754	65	3	7	0.14143	71	3
8	0.05150	47	2	8	0.07772	57	2	8	0.10818	64	2	8	0.14214	71	2
9	0.05198	48	1	9	0.07829	57	1	9	0.10883	65	1	9	0.14285	71	1
21 0	0.05246	48	79 0	26 0	0.07886	57	74 0	31 0	0.10948	65	69 0	36 0	0.14356	71	64 0
1	0.05294	48	9	1	0.07944	58	9	1	0.11013	65	9	1	0.14427	71	9
2	0.05343	49	8	2	0.08001	57	8	2	0.11078	65	8	2	0.14498	71	8
3	0.05391	48	7	3	0.08059	58	7	3	0.11143	65	7	3	0.14569	71	7
4	0.05440	49	6	4	0.08117	58	6	4	0.11209	66	6	4	0.14641	72	6
5	0.05489	49	5	5	0.08175	58	5	5	0.11274	65	5	5	0.14712	71	5
6	0.05538	49	4	6	0.08233	58	4	6	0.11340	66	4	6	0.14784	72	4
7	0.05588	50	3	7	0.08291	58	3	7	0.11406	66	3	7	0.14855	71	3
8	0.05637	49	2	8	0.08350	59	2	8	0.11472	66	2	8	0.14927	72	2
9	0.05687	50	1	9	0.08408	58	1	9	0.11538	66	1	9	0.14999	72	1
22 0	0.05737	50	78 0	27 0	0.08467	59	73 0	32 0	0.11604	66	68 0	37 0	0.15071	72	63 0
1	0.05787	50	9	1	0.08526	59	9	1	0.11671	67	9	1	0.15143	72	9
2	0.05838	51	8	2	0.08585	59	8	2	0.11737	66	8	2	0.15216	73	8
3	0.05888	50	7	3	0.08645	60	7	3	0.11804	67	7	3	0.15288	72	7
4	0.05939	51	6	4	0.08704	59	6	4	0.11871	67	6	4	0.15360	72	6
5	0.05990	51	5	5	0.08764	60	5	5	0.11938	67	5	5	0.15433	73	5
6	0.06041	51	4	6	0.08824	60	4	6	0.12005	67	4	6	0.15506	73	4
7	0.06092	51	3	7	0.08884	60	3	7	0.12072	67	3	7	0.15578	72	3
8	0.06144	52	2	8	0.08944	60	2	8	0.12139	67	2	8	0.15651	73	2
9	0.06195	51	1	9	0.09004	60	1	9	0.12206	67	1	9	0.15724	73	1
23 0	0.06247	52	77 0	28 0	0.09064	60	72 0	33 0	0.12274	68	67 0	38 0	0.15797	73	62 0
1	0.06299	52	9	1	0.09125	61	9	1	0.12342	68	9	1	0.15870	73	9
2	0.06351	52	8	2	0.09186	61	8	2	0.12409	67	8	2	0.15943	73	8
3	0.06404	53	7	3	0.09247	61	7	3	0.12477	68	7	3	0.16016	73	7
4	0.06456	52	6	4	0.09308	61	6	4	0.12545	68	6	4	0.16090	74	6
5	0.06509	53	5	5	0.09369	61	5	5	0.12614	69	5	5	0.16163	73	5
6	0.06562	53	4	6	0.09430	61	4	6	0.12682	68	4	6	0.16237	74	4
7	0.06615	53	3	7	0.09492	62	3	7	0.12750	68	3	7	0.16310	73	3
8	0.06669	54	2	8	0.09554	62	2	8	0.12819	69	2	8	0.16384	74	2
9	0.06722	53	1	9	0.09615	61	1	9	0.12887	68	1	9	0.16458	74	1
24 0	0.06776	54	76 0	29 0	0.09677	62	71 0	34 0	0.12956	69	66 0	39 0	0.16532	74	61 0
1	0.06830	54	9	1	0.09739	62	9	1	0.13025	69	9	1	0.16605	73	9
2	0.06884	54	8	2	0.09802	63	8	2	0.13094	69	8	2	0.16680	75	8
3	0.06938	54	7	3	0.09864	62	7	3	0.13163	69	7	3	0.16754	74	7
4	0.06992	54	6	4	0.09927	63	6	4	0.13232	69	6	4	0.16828	74	6
5	0.07047	55	5	5	0.09989	62	5	5	0.13302	70	5	5	0.16902	74	5
6	0.07102	55	4	6	0.10052	63	4	6	0.13371	69	4	6	0.16976	74	4
7	0.07157	55	3	7	0.10115	63	3	7	0.13441	70	3	7	0.17051	75	3
8	0.07212	55	2	8	0.10179	64	2	8	0.13511	70	2	8	0.17125	74	2
9	0.07267	55	1	9	0.10242	63	1	9	0.13580	69	1	9	0.17200	75	1
25 0	0.07322	55	75 0	30 0	0.10305	63	70 0	35 0	0.13650	70	65 0	40 0	0.17275	75	60 0

TABLE IV. Argument Z.

Z = A ou 100 + A	½ sin² Z	D	Z = 100 + A ou 300 + A	Z = A ou 200 + A	½ sin² Z	D	Z = 100 + A ou 300 + A	Z = A ou 200 + A	½ sin² Z	D	Z = 100 + A ou 300 + A	Z = A ou 200 + A	½ sin² Z	D	Z = 100 + A ou 300 + A
40° 1	0.17349	75	59 9	45° 1	0.21167	78	55 9	50° 1	0.25079	79	49° 9	55° 1	0.28988	77	44° 9
2	0.17424	75	8	2	0.21244	77	8	2	0.25157	78	8	2	0.29066	78	8
3	0.17499	75	7	3	0.21322	78	7	3	0.25236	79	7	3	0.29143	77	7
4	0.17574	75	6	4	0.21400	78	6	4	0.25314	78	6	4	0.29221	78	6
5	0.17649	75	5	5	0.21477	77	5	5	0.25393	79	5	5	0.29298	77	5
6	0.17724	75	4	6	0.21555	78	4	6	0.25471	78	4	6	0.29376	78	4
7	0.17799	75	3	7	0.21633	78	3	7	0.25550	79	3	7	0.29453	77	3
8	0.17875	76	2	8	0.21711	78	2	8	0.25628	78	2	8	0.29530	77	2
9	0.17950	75	1	9	0.21789	78	1	9	0.25707	79	1	9	0.29607	77	1
41 0	0.18025	75	59 0	46 0	0.21867	78	54 0	51 0	0.25785	78	49 0	56 0	0.29685	78	44 0
1	0.18101	76	9	1	0.21945	78	9	1	0.25864	79	9	1	0.29762	77	9
2	0.18176	75	8	2	0.22023	78	8	2	0.25942	78	8	2	0.29839	77	8
3	0.18252	76	7	3	0.22101	78	7	3	0.26021	79	7	3	0.29916	77	7
4	0.18327	75	6	4	0.22179	78	6	4	0.26099	78	6	4	0.29993	77	6
5	0.18403	76	5	5	0.22257	78	5	5	0.26178	79	5	5	0.30070	77	5
6	0.18479	76	4	6	0.22335	78	4	6	0.26256	78	4	6	0.30147	77	4
7	0.18555	76	3	7	0.22413	78	3	7	0.26335	79	3	7	0.30223	76	3
8	0.18631	76	2	8	0.22491	78	2	8	0.26413	78	2	8	0.30300	77	2
9	0.18707	76	1	9	0.22569	78	1	9	0.26491	78	1	9	0.30377	77	1
42 0	0.18783	76	58 0	47 0	0.22647	78	53 0	52 0	0.26570	79	48 0	57 0	0.30454	77	43 0
1	0.18859	76	9	1	0.22725	78	9	1	0.26648	78	9	1	0.30530	76	9
2	0.18935	76	8	2	0.22804	79	8	2	0.26726	78	8	2	0.30607	77	8
3	0.19011	76	7	3	0.22882	78	7	3	0.26805	79	7	3	0.30683	76	7
4	0.19088	77	6	4	0.22960	78	6	4	0.26883	78	6	4	0.30760	77	6
5	0.19164	76	5	5	0.23039	79	5	5	0.26961	78	5	5	0.30836	76	5
6	0.19240	76	4	6	0.23117	78	4	6	0.27040	79	4	6	0.30912	76	4
7	0.19317	77	3	7	0.23194	77	3	7	0.27118	78	3	7	0.30989	77	3
8	0.19393	76	2	8	0.23273	79	2	8	0.27196	78	2	8	0.31065	76	2
9	0.19470	77	1	9	0.23352	79	1	9	0.27274	78	1	9	0.31141	76	1
43 0	0.19546	76	57 0	48 0	0.23430	78	52 0	53 0	0.27353	79	47 0	58 0	0.31217	76	42 0
1	0.19623	77	9	1	0.23509	79	9	1	0.27431	78	9	1	0.31293	76	9
2	0.19700	77	8	2	0.23587	78	8	2	0.27509	78	8	2	0.31369	76	8
3	0.19777	77	7	3	0.23665	78	7	3	0.27587	78	7	3	0.31445	76	7
4	0.19853	76	6	4	0.23744	79	6	4	0.27665	78	6	4	0.31521	76	6
5	0.19930	77	5	5	0.23822	78	5	5	0.27743	78	5	5	0.31597	76	5
6	0.20007	77	4	6	0.23901	79	4	6	0.27821	78	4	6	0.31673	76	4
7	0.20084	77	3	7	0.23979	78	3	7	0.27899	78	3	7	0.31748	75	3
8	0.20161	77	2	8	0.24058	79	2	8	0.27977	78	2	8	0.31824	76	2
9	0.20238	77	1	9	0.24136	78	1	9	0.28055	78	1	9	0.31899	75	1
44 0	0.20315	77	56 0	49 0	0.24215	79	51 0	54 0	0.28133	78	46 0	59 0	0.31975	76	41 0
1	0.20393	78	9	1	0.24293	78	9	1	0.28211	78	9	1	0.32050	75	9
2	0.20470	77	8	2	0.24372	79	8	2	0.28289	78	8	2	0.32125	75	8
3	0.20547	77	7	3	0.24450	78	7	3	0.28367	78	7	3	0.32201	76	7
4	0.20624	77	6	4	0.24529	79	6	4	0.28445	78	6	4	0.32276	75	6
5	0.20702	78	5	5	0.24607	78	5	5	0.28523	78	5	5	0.32351	75	5
6	0.20779	77	4	6	0.24686	79	4	6	0.28600	77	4	6	0.32426	75	4
7	0.20857	78	3	7	0.24764	78	3	7	0.28678	78	3	7	0.32501	75	3
8	0.20934	77	2	8	0.24843	79	2	8	0.28756	78	2	8	0.32576	75	2
9	0.21012	78	1	9	0.24921	78	1	9	0.28833	77	1	9	0.32651	75	1
45 0	0.21089	77	55 0	50 0	0.25000	79	50 0	55 0	0.28911	78	45 0	60 0	0.32725	74	40 0



TABLE IV. Argument Z.

Z = A ou 200 + A	½ sin² Z	D	Z = 100 + A ou 300 + A	Z = A ou 200 + A	½ sin² Z	D	Z = 100 + A ou 300 + A	Z = A ou 200 + A	½ sin² Z	D	Z = 100 + A oo 300 + A	Z = A ou 200 + A	½ sin² Z	D	Z = 100 + A ou 300 + A
60° 1	0.32800	75	39° 9	65° 1	0.36420	70	34° 9	70° 1	0.39758	63	30° 9	75° 1	0.42733	55	25° 9
2	0.32875	75	8	2	0.36489	69	8	2	0.39821	63	8	2	0.42788	55	8
3	0.32949	74	7	3	0.36559	70	7	3	0.39885	64	7	3	0.42843	55	7
4	0.33024	75	6	4	0.36629	70	6	4	0.39948	63	6	4	0.42898	55	6
5	0.33098	74	5	5	0.36698	69	5	5	0.40010	62	5	5	0.42953	55	5
6	0.33172	74	4	6	0.36768	70	4	6	0.40073	63	4	6	0.43008	55	4
7	0.33246	74	3	7	0.36837	69	3	7	0.40136	63	3	7	0.43062	54	3
8	0.33320	74	2	8	0.36906	69	2	8	0.40198	62	2	8	0.43116	54	2
9	0.33395	75	1	9	0.36975	69	1	9	0.40261	63	1	9	0.43170	54	1
61 0	0.33468	73	39 0	66 0	0.37044	69	34 0	71 0	0.40323	62	29 0	76 0	0.43224	54	24 0
1	0.33542	74	9	1	0.37113	69	9	1	0.40385	62	9	1	0.43278	54	9
2	0.33616	74	8	2	0.37181	68	8	2	0.40446	61	8	2	0.43331	53	8
3	0.33690	74	7	3	0.37250	69	7	3	0.40508	62	7	3	0.43385	54	7
4	0.33763	73	6	4	0.37318	68	6	4	0.40570	62	6	4	0.43438	53	6
5	0.33837	74	5	5	0.37386	68	5	5	0.40631	61	5	5	0.43491	53	5
6	0.33910	73	4	6	0.37455	69	4	6	0.40692	61	4	6	0.43544	53	4
7	0.33984	74	3	7	0.37523	68	3	7	0.40753	61	3	7	0.43596	52	3
8	0.34057	73	2	8	0.37591	68	2	8	0.40814	61	2	8	0.43649	53	2
9	0.34130	73	1	9	0.37658	67	1	9	0.40875	61	1	9	0.43700	51	1
62 0	0.34203	73	38 0	67 0	0.37726	68	33 0	72 0	0.40936	61	28 0	77 0	0.43753	53	23 0
1	0.34276	73	9	1	0.37794	68	9	1	0.40996	60	9	1	0.43805	52	9
2	0.34349	73	8	2	0.37861	67	8	2	0.41056	60	8	2	0.43856	51	8
3	0.34422	73	7	3	0.37928	67	7	3	0.41116	60	7	3	0.43908	52	7
4	0.34494	72	6	4	0.37995	67	6	4	0.41176	60	6	4	0.43959	51	6
5	0.34567	73	5	5	0.38062	67	5	5	0.41236	60	5	5	0.44010	51	5
6	0.34640	73	4	6	0.38129	67	4	6	0.41296	60	4	6	0.44061	51	4
7	0.34712	72	3	7	0.38196	67	3	7	0.41355	59	3	7	0.44112	51	3
8	0.34784	72	2	8	0.38263	67	2	8	0.41415	60	2	8	0.44162	50	2
9	0.34857	73	1	9	0.38329	66	1	9	0.41474	59	1	9	0.44213	51	1
63 0	0.34929	72	37 0	68 0	0.38396	67	32 0	73 0	0.41533	59	27 0	78 0	0.44263	50	22 0
1	0.35001	72	9	1	0.38462	66	9	1	0.41592	59	9	1	0.44313	50	9
2	0.35073	72	8	2	0.38528	66	8	2	0.41650	58	8	2	0.44363	50	8
3	0.35144	71	7	3	0.38594	66	7	3	0.41709	59	7	3	0.44412	49	7
4	0.35216	72	6	4	0.38660	66	6	4	0.41767	58	6	4	0.44462	50	6
5	0.35288	72	5	5	0.38726	66	5	5	0.41825	58	5	5	0.44511	49	5
6	0.35359	71	4	6	0.38791	65	4	6	0.41883	58	4	6	0.44560	49	4
7	0.35431	72	3	7	0.38857	66	3	7	0.41941	58	3	7	0.44609	49	3
8	0.35502	71	2	8	0.38922	65	2	8	0.41999	58	2	8	0.44657	48	2
9	0.35573	71	1	9	0.38987	65	1	9	0.42056	57	1	9	0.44706	49	1
64 0	0.35644	71	36 0	69 0	0.39052	65	31 0	74 0	0.42114	58	26 0	79 0	0.44754	48	21 0
1	0.35715	71	9	1	0.39117	65	9	1	0.42171	57	9	1	0.44802	48	9
2	0.35786	71	8	2	0.39182	65	8	2	0.42228	57	8	2	0.44850	48	8
3	0.35857	71	7	3	0.39246	64	7	3	0.42285	57	7	3	0.44897	47	7
4	0.35928	71	6	4	0.39311	65	6	4	0.42341	56	6	4	0.44945	48	6
5	0.35998	70	5	5	0.39375	64	5	5	0.42398	57	5	5	0.44992	47	5
6	0.36069	71	4	6	0.39439	64	4	6	0.42454	56	4	6	0.45039	47	4
7	0.36139	70	3	7	0.39503	64	3	7	0.42510	56	3	7	0.45086	47	3
8	0.36210	71	2	8	0.39567	64	2	8	0.42566	56	2	8	0.45133	47	2
9	0.36280	70	1	9	0.39631	64	1	9	0.42622	56	1	9	0.45179	46	1
65 0	0.36350	70	35 0	70 0	0.39695	64	30 0	75 0	0.42678	56	25 0	80 0	0.45225	46	20 0

TABLE IV. Argument *Z*.

$Z = A$ ou $200 + A$	$\frac{1}{2}\sin^2 Z$	D	$Z = 100 + A$ ou $300 + A$	$Z = A$ ou $200 + A$	$\frac{1}{2}\sin^2 Z$	D	$Z = 100 + A$ ou $300 + A$	$Z = A$ ou $200 + A$	$\frac{1}{2}\sin^2 Z$	D	$Z = 100 + A$ ou $300 + A$	$Z = A$ ou $200 + A$	$\frac{1}{2}\sin^2 Z$	D	$Z = 100 + A$ ou $300 + A$
80° 1	0.45271	46	19° 9	85° 1	0.47311	36	14° 9	90° 1	0.48801	25	9° 9	95° 1	0.49704	12	4° 9
2	0.45317	46	8	2	0.47346	35	8	2	0.48824	23	8	2	0.49716	12	8
3	0.45363	46	7	3	0.47381	35	7	3	0.48848	24	7	3	0.49728	12	7
4	0.45408	45	6	4	0.47416	35	6	4	0.48872	24	6	4	0.49739	11	6
5	0.45454	46	5	5	0.47451	35	5	5	0.48895	23	5	5	0.49751	12	5
6	0.45499	45	4	6	0.47485	34	4	6	0.48918	23	4	6	0.49762	11	4
7	0.45544	45	3	7	0.47519	34	3	7	0.48941	23	3	7	0.49772	10	3
8	0.45588	44	2	8	0.47553	34	2	8	0.48963	22	2	8	0.49783	11	2
9	0.45633	45	1	9	0.47587	34	1	9	0.48985	22	1	9	0.49793	10	1
81 0	0.45677	44	19 0	86 0	0.47621	34	14 0	91 0	0.49007	22	9 0	96 0	0.49803	10	4 0
1	0.45721	44	9	1	0.47654	33	9	1	0.49029	22	9	1	0.49813	10	9
2	0.45765	44	8	2	0.47687	33	8	2	0.49051	22	8	2	0.49822	9	8
3	0.45809	44	7	3	0.47720	33	7	3	0.49072	21	7	3	0.49831	9	7
4	0.45852	43	6	4	0.47753	33	6	4	0.49093	21	6	4	0.49840	9	6
5	0.45895	43	5	5	0.47785	32	5	5	0.49114	21	5	5	0.49849	9	5
6	0.45938	43	4	6	0.47817	32	4	6	0.49135	21	4	6	0.49858	9	4
7	0.45981	43	3	7	0.47849	32	3	7	0.49155	20	3	7	0.49866	8	3
8	0.46024	43	2	8	0.47881	32	2	8	0.49175	20	2	8	0.49874	8	2
9	0.46066	42	1	9	0.47913	32	1	9	0.49195	20	1	9	0.49882	8	1
82 0	0.46108	42	18 0	87 0	0.47944	31	13 0	92 0	0.49215	20	8 0	97 0	0.49889	7	3 0
1	0.46150	42	9	1	0.47975	31	9	1	0.49234	19	9	1	0.49896	7	9
2	0.46192	42	8	2	0.48006	31	8	2	0.49253	19	8	2	0.49903	7	8
3	0.46233	41	7	3	0.48036	30	7	3	0.49272	19	7	3	0.49910	7	7
4	0.46275	42	6	4	0.48067	31	6	4	0.49291	19	6	4	0.49917	7	6
5	0.46316	41	5	5	0.48097	30	5	5	0.49309	18	5	5	0.49923	6	5
6	0.46357	41	4	6	0.48127	30	4	6	0.49327	18	4	6	[illegible]	6	4
7	0.46398	41	3	7	0.48157	30	3	7	0.49345	18	3	7	0.4993[illegible]	6	3
8	0.46438	40	2	8	0.48186	29	2	8	0.49363	18	2	8	0.4994[illegible]	5	2
9	0.46478	40	1	9	0.48215	29	1	9	0.49381	18	1	9	0.4994[illegible]	6	1
83 0	0.46519	41	17 0	88 0	0.48244	29	12 0	93 0	0.49398	17	7 0	98 0	0.49951	5	2 0
1	0.46558	39	9	1	0.48273	29	9	1	0.49415	17	9	1	0.49955	4	9
2	0.46598	40	8	2	0.48302	29	8	2	0.49432	17	8	2	[illegible]	5	8
3	0.46638	40	7	3	0.48330	28	7	3	0.49448	16	7	3	0.49964	4	7
4	0.46677	39	6	4	0.48358	28	6	4	0.49465	17	6	4	[illegible]	4	6
5	0.46716	39	5	5	0.48386	28	5	5	0.49481	16	5	5	[illegible]	4	5
6	0.46755	39	4	6	0.48414	28	4	6	0.49496	15	4	6	[illegible]	4	4
7	0.46793	38	3	7	0.48441	27	3	7	0.49512	16	3	7	0.49979	3	3
8	0.46832	39	2	8	0.48468	27	2	8	0.49527	15	2	8	0.49982	3	2
9	0.46870	38	1	9	0.48495	27	1	9	0.49542	15	1	9	0.49985	3	1
84 0	0.46908	38	16 0	89 0	0.48522	27	11 0	94 0	0.49557	15	6 0	99 0	0.49988	3	1 0
1	0.46945	37	9	1	0.48548	26	9	1	0.49572	15	9	1	0.49990	2	9
2	0.46983	38	8	2	0.48575	27	8	2	0.49586	14	8	2	0.49992	2	8
3	0.47020	37	7	3	0.48601	26	7	3	0.49600	14	7	3	0.49994	2	7
4	0.47057	37	6	4	0.48627	26	6	4	0.49614	14	6	4	0.49996	2	6
5	0.47094	37	5	5	0.48652	25	5	5	0.49628	14	5	5	0.49997	1	5
6	0.47131	37	4	6	0.48677	25	4	6	0.49641	13	4	6	0.49998	1	4
7	0.47167	36	3	7	0.48703	26	3	7	0.49654	13	3	7	0.49999	1	3
8	0.47203	36	2	8	0.48727	24	2	8	0.49667	13	2	8	0.50000	1	2
9	0.47239	36	1	9	0.48752	25	1	9	0.49680	13	1	9	0.50000	0	1
85 0	0.47275	36	15 0	90 0	0.48776	24	10 0	95 0	0.49692	12	5 0	100 0	0.50000	0	0 0



TABLE V.

Valeur du facteur tang L, dans le terme $\frac{1}{2}\,\varphi^2 \sin^2 Z$ tang L.

Argument L, ou *Latitude*.

L.	Tang *L*.	Diff.	*L*.	Tang *L*.	Diff.	*L*.	Tang. *L*.	Diff.	*L*.	Tang *L*.	Diff.
30° 1	0.51151	198	33° 1	0.57247	208	36° 1	0.63683	221	39° 1	0.70516	235
2	0.51349	199	2	0.57456	209	2	0.63904	221	2	0.70752	236
3	0.51548	199	3	0.57665	209	3	0.64125	221	3	0.70988	236
4	0.51747	199	4	0.57875	210	4	0.64347	222	4	0.71224	236
5	0.51946		5	0.58085	210	5	0.64569	222	5	0.71461	237
		200			210			223			238
6	0.52146	199	6	0.58295	211	6	0.64792	223	6	0.71699	238
7	0.52345	201	7	0.58506	211	7	0.65015	224	7	0.71937	238
8	0.52546	200	8	0.58717	211	8	0.65239	224	8	0.72175	240
9	0.52746	201	9	0.58928	212	9	0.65463	225	9	0.72415	239
31 0	0.52947		34 0	0.59140		37 0	0.65688		40 0	0.72654	
		202			212			225			241
1	0.53149	201	1	0.59352	213	1	0.65913	225	1	0.72895	240
2	0.53350	202	2	0.59565	213	2	0.66138	226	2	0.73135	242
3	0.53552	202	3	0.59778	213	3	0.66364	227	3	0.73377	242
4	0.53754	203	4	0.59991	214	4	0.66591	227	4	0.73619	242
5	0.53957		5	0.60205		5	0.66818		5	0.73861	
		203			214			227			243
6	0.54160	203	6	0.60419	215	6	0.67045	228	6	0.74104	24[illegible]
7	0.54363	204	7	0.60634	215	7	0.67273	229	7	0.74348	24[illegible]
8	0.54567	204	8	0.60849	215	8	0.67502	229	8	0.74592	24[illegible]
9	0.54771	205	9	0.61064	216	9	0.67731	229	9	0.74837	245
32 0	0.54976		35 0	0.61280		38 0	0.67960		41 0	0.75082	
		204			216			230			24[illegible]
1	0.55180	205	1	0.61496	217	1	0.68190	230	1	0.75328	24[illegible]
2	0.55385	206	2	0.61713	217	2	0.68420	231	2	0.75575	24[illegible]
3	0.55591	206	3	0.61930	218	3	0.68651	231	3	0.75822	24[illegible]
4	0.55797	206	4	0.62148	218	4	0.68882	232	4	0.76069	24[illegible]
5	0.56003		5	0.62366		5	0.69114		5	0.76318	
		206			218			233			24[illegible]
6	0.56209	207	6	0.62584	219	6	0.69347	233	6	0.76566	25[illegible]
7	0.56416	207	7	0.62803	219	7	0.69580	233	7	0.76816	25[illegible]
8	0.56623	208	8	0.63022	220	8	0.69813	234	8	0.77066	25[illegible]
9	0.56831	208	9	0.63242	220	9	0.70047	234	9	0.77317	25[illegible]
33 0	0.57039		36 0	0.63462		39 0	0.70281		42 0	0.77568	



TABLE V. Argument, *L* ou *Latitude*.

L.	Tang. *L.*	Differ.	*L.*	Tang. *L.*	Differ.	*L.*	Tang *L.*	Diff.	*L.*	Tang *L.*	Diff.
42° 1	0.77820	252	46° 6	0.89851	283	51° 1	1.03517	325	55° 6	1.19345	381
2	0.78072	252	7	0.90135	284	2	1.03843	326	7	1.19726	381
3	0.78326	254	8	0.90420	285	3	1.04170	327	8	1.20109	383
4	0.78579	253	9	0.90706	286	4	1.04498	328	9	1.20493	384
5	0.78834	255	47 0	0.90993	287	5	1.04827	329	56 0	1.20879	386
		255			288			330			388
6	0.79089		1	0.91281		6	1.05157		1	1.21267	
7	0.79344	255	2	0.91569	288	7	1.05489	332	2	1.21655	388
8	0.79601	257	3	0.91858	289	8	1.05821	332	3	1.22046	391
9	0.79858	257	4	0.92148	290	9	1.06155	334	4	1.22438	392
43 0	0.80115	257	5	0.92439	291	52 0	•1.06489	334	5	1.22831	393
		258			292			336			395
1	0.80373		6	0.92731		1	1.06825		6	1.23226	
2	0.80632	259	7	0.93023	292	2	1.07162	337	7	1.23622	396
3	0.80892	260	8	0.93317	294	3	1.07500	338	8	1.24020	398
4	0.81152	260	9	0.93611	294	4	1.07839	339	9	1.24419	399
5	0.81413	261	48 0	0.93906	295	5	1.08179	340	57 0	1.24820	401
		261			296			342			403
6	0.81674		1	0.94202		6	1.08521		1	1.25223	
7	0.81937	263	2	0.94499	297	7	1.08864	343	2	1.25627	404
8	0.82199	262	3	0.94797	298	8	1.09207	343	3	1.26033	406
9	0.82463	264	4	0.95096	299	9	1.09552	345	4	1.26440	407
44 0	0.82727	264	5	0.95395	299	53 0	1.09899	347	5	1.26849	409
		265			301			347			411
1	0.82992		6	0.95696		1	1.10246		6	1.27260	
2	0.83258	266	7	0.95997	301	2	1.10595	349	7	1.27672	412
3	0.83524	266	8	0.96299	302	3	1.10944	349	8	1.28086	414
4	0.83791	267	9	0.96603	304	4	1.11295	351	9	1.28502	416
5	0.84059	268	49 0	0.96907	304	5	1.11648	353	58 0	1.28919	417
		268			305			353			419
6	0.84327		1	0.97212		6	1.11201		1	1.29338	
7	0.84596	269	2	0.97518	306	7	1.12356	355	2	1.29759	421
8	0.84866	270	3	0.97825	307	8	1.12712	356	3	1.30181	422
9	0.85137	271	4	0.98133	308	9	1.13069	357	4	1.30606	425
45 0	0.85408	271	5	0.98441	308	54 0	1.13428	359	5	1.31031	425
		272			310			360			428
1	0.85680		6	0.98751		1	1.13788		6	1.31459	
2	0.85953	273	7	0.99062	311	2	1.14149	361	7	1.31889	430
3	0.86226	273	8	0.99374	312	3	1.14511	362	8	1.32320	431
4	0.86501	275	9	0.99686	312	4	1.14875	364	9	1.32753	433
5	0.86776	275	50 0	1.00000	314	5	1.15240	365	59 0	1.33188	435
		275			315			366			436
6	0.87051		1	1.00315		6	1.15606		1	1.33624	
7	0.87328	277	2	1.00630	315	7	1.15974	368	2	1.34063	439
8	0.87605	277	3	1.00947	317	8	1.16343	369	3	1.34503	440
9	0.87883	278	4	1.01265	318	9	1.16713	370	4	1.34945	442
46 0	0.88162	279	5	1.01583	318	55 0	1.17085	372	5	1.35389	444
		279			320			373			446
1	0.88441		6	1.01903		1	1.17458		6	1.35835	
2	0.88722	281	7	1.02224	321	2	1.17833	375	7	1.36283	448
3	0.89003	281	8	1.02545	321	3	1.18208	375	8	1.36733	450
4	0.89285	282	9	1.02868	323	4	1.18586	378	9	1.37185	452
5	0.89568	283	51 0	1.03192	324	5	1.18964	378	60 0	1.37638	453



TABLE VI.

PREMIÈRE PARTIE.

Valeurs du facteur $e^2 \cos.^2 L$, dans le terme $dL\,(1 + e^2 \cos.^2 L + \frac{3}{2} e^2\, dL \sin. L \cos. L)$.

Argument, *L* ou *Latitude*.

L.	e^2 *cosin.*^{2} *L.*	Differ.	*L.*	e^2 *cosin.*^{2} *L.*	Differ.	*L.*	e^2 *cosin.*^{2} *L*	Differ.	*L.*	e^2 *cosin.*^{2} *L.*	Differ.
30° 1	0.0047250		35° 1	0.0043255	83	40° 1	0.0038927	90	45° 1	0.0034376	93
2	0.0047174	76	2	0.0043171	84	2	0.0038839	88	2	0.0034284	92
3	0.0047097	77	3	0.0043087	84	3	0.0038749	90	3	0.0034191	93
4	0.0047022	75	4	0.0043003	84	4	0.0038660	89	4	0.0034098	93
5	0.0046945	77	5	0.0042919	84	5	0.0038570	90	5	0.0034006	92
6	0.0046868	77	6	0.0042835	84	6	0.0038481	89	6	0.0033913	93
7	0.0046791	77	7	0.0042751	84	7	0.0038391	90	7	0.0033820	93
8	0.0046715	76	8	0.0042666	85	8	0.0038301	90	8	0.0033728	92
9	0.0046637	78	9	0.0042582	84	9	0.0038212	89	9	0.0033635	93
31 0	0.0046560	77	36 0	0.0042497	85	41 0	0.0038122	90	46 0	0.0033542	93
1	0.0046482	78	1	0.0042412	85	1	0.0038032	90	1	0.0033449	93
2	0.0046405	77	2	0.0042327	85	2	0.0037942	90	2	0.0033356	93
3	0.0046327	78	3	0.0042242	85	3	0.0037853	91	3	0.0033263	93
4	0.0046248	79	4	0.0042157	85	4	0.0037761	91	4	0.0033170	93
5	0.0046170	78	5	0.0042072	85	5	0.0037671	90	5	0.0033077	93
6	0.0046092	78	6	0.0041986	86	6	0.0037581	90	6	0.0032984	93
7	0.0046014	78	7	0.0041901	85	7	0.0037491	90	7	0.0032891	93
8	0.0045935	79	8	0.0041815	86	8	0.0037400	89	8	0.0032798	93
9	0.0045856	79	9	0.0041730	85	9	0.0037309	91	9	0.0032704	94
32 0	0.0045777	79	37 0	0.0041644	86	42 0	0.0037219	90	47 0	0.0032611	93
1	0.0045698	79	1	0.0041558	86	1	0.0037128	91	1	0.0032518	93
2	0.0045619	79	2	0.0041472	86	2	0.0037037	91	2	0.0032425	93
3	0.0045539	80	3	0.0041385	87	3	0.0036946	91	3	0.0032331	94
4	0.0045460	79	4	0.0041299	86	4	0.0036855	91	4	0.0032238	93
5	0.0045379	81	5	0.0041212	87	5	0.0036764	91	5	0.0032145	93
6	0.0045300	79	6	0.0041126	86	6	0.0036673	91	6	0.0032051	94
7	0.0045220	80	7	0.0041039	87	7	0.0036582	91	7	0.0031958	93
8	0.0045139	81	8	0.0040953	86	8	0.0036491	91	8	0.0031864	94
9	0.0045059	80	9	0.0040865	88	9	0.0036400	91	9	0.0031771	93
33 0	0.0044979	80	38 0	0.0040779	86	43 0	0.0036308	92	48 0	0.0031678	93
1	0.0044898	81	1	0.0040692	87	1	0.0036217	91	1	0.0031584	94
2	0.0044817	81	2	0.0040604	88	2	0.0036125	92	2	0.0031491	93
3	0.0044737	80	3	0.0040517	87	3	0.0036034	91	3	0.0031397	94
4	0.0044655	82	4	0.0040429	88	4	0.0035942	92	4	0.0031304	93
5	0.0044574	81	5	0.0040342	87	5	0.0035850	92	5	0.0031210	94
6	0.0044492	82	6	0.0040254	88	6	0.0035759	91	6	0.0031117	93
7	0.0044411	81	7	0.0040167	87	7	0.0035667	92	7	0.0031023	94
8	0.0044330	81	8	0.0040079	88	8	0.0035575	92	8	0.0030930	93
9	0.0044247	83	9	0.0039990	89	9	0.0035483	92	9	0.0030836	94
34 0	0.0044165	82	39 0	0.0039903	87	44 0	0.0035391	92	49 0	0.0030742	94
1	0.0044083	82	1	0.0039816	87	1	0.0035299	92	1	0.0030649	93
2	0.0044001	82	2	0.0039726	90	2	0.0035207	92	2	0.0030555	94
3	0.0043918	83	3	0.0039638	88	3	0.0035115	92	3	0.0030462	93
4	0.0043836	82	4	0.0039550	88	4	0.0035023	92	4	0.0030368	94
5	0.0043753	83	5	0.0039461	89	5	0.0034931	92	5	0.0030274	94
6	0.0043670	83	6	0.0039373	88	6	0.0034838	93	6	0.0030181	93
7	0.0043588	82	7	0.0039284	89	7	0.0034746	92	7	0.0030087	94
8	0.0043506	82	8	0.0039195	89	8	0.0034654	92	8	0.0029993	94
9	0.0043422	84	9	0.0039106	89	9	0.0034561	93	9	0.0029900	93
35 0	0.0043338	84	40 0	0.0039017	89	45 0	0.0034469	92	50 0	0.0029806	94



TABLE VI. Argument, *L* ou *Latitude*.

L.	*e² cosin.² L.*	Differ.	*L.*	*e² cosin.² L.*	Differ.	*L.*	*e² cosin.² L.*	Differ.	*L.*	*e² cosin.² L.*	Differ.
50° 1	0.0029712	94	6	0.0027374	94	55° 1	0.0025051	93	6	0.0022757	91
2	0.0029619	93	7	0.0027281	93	2	0.0024959	92	7	0.0022666	91
3	0.0029525	94	8	0.0027188	93	3	0.0024866	93	8	0.0022575	91
4	0.0029432	93	9	0.0027094	94	4	0.0024774	92	9	0.0022484	91
5	0.0029338	94	53° 0	0.0027001	93	5	0.0024682	92	58° 0	0.0022394	90
		94			93			93			91
6	0.0029244	93	1	0.0026908	93	6	0.0024589	92	1	0.0022303	91
7	0.0029151	94	2	0.0026815	93	7	0.0024497	92	2	0.0022212	91
8	0.0029057	93	3	0.0026722	94	8	0.0024405	92	3	0.0022121	89
9	0.0028964	94	4	0.0026628	93	9	0.0024313	92	4	0.0022032	91
51 0	0.0028870		5	0.0026535		56 0	0.0024221		5	0.0021941	
		94			93			92			90
1	0.0028776	93	6	0.0026442	93	1	0.0024129	92	6	0.0021851	90
2	0.0028683	94	7	0.0026349	93	2	0.0024037	92	7	0.0021761	90
3	0.0028589	94	8	0.0026256	93	3	0.0023945	91	8	0.0021671	90
4	0.0028495	93	9	0.0026163	93	4	0.0023854	92	9	0.0021581	90
5	0.0028402		54 0	0.0026070		5	0.0023762		59 0	0.0021491	
		94			92			92			89
6	0.0028308	93	1	0.0025978	93	6	0.0023670	92	1	0.0021400	89
7	0.0028215	93	2	0.0025885	93	7	0.0023578	91	2	0.0021311	90
8	0.0028122	94	3	0.0025792	93	8	0.0023487	92	3	0.0021221	89
9	0.0028028	93	4	0.0025699	93	9	0.0023395	91	4	0.0021132	90
52 0	0.0027935		5	0.0025606		57 0	0.0023304		5	0.0021042	
		94			92			91			90
1	0.0027841	93	6	0.0025514	93	1	0.0023213	92	6	0.0020952	89
2	0.0027748	94	7	0.0025421	92	2	0.0023121	91	7	0.0020863	90
3	0.0027654	93	8	0.0025329	93	3	0.0023030	91	8	0.0020773	89
4	0.0027561	93	9	0.0025236	92	4	0.0022939	91	9	0.0020684	88
5	0.0027468		55 0	0.0025144		5	0.0022848		60 0	0.0020596	

PARTIES PROPORTIONNELLES.

76.		78.		80.		82.		84.	
1	8	1	8	1	8	1	8	1	8
2	15	2	16	2	16	2	16	2	17
3	23	3	23	3	24	3	25	3	25
4	30	4	31	4	32	4	33	4	34
5	38	5	39	5	40	5	41	5	42
6	46	6	47	6	48	6	49	6	50
7	53	7	55	7	56	7	57	7	59
8	61	8	62	8	64	8	66	8	67
9	68	9	70	9	72	9	74	9	76

86.		88.		90.		92.		94.	
1	9	1	9	1	9	1	9	1	9
2	17	2	18	2	18	2	18	2	19
3	26	3	26	3	27	3	28	3	28
4	34	4	35	4	36	4	37	4	38
5	43	5	44	5	45	5	46	5	47
6	52	6	53	6	54	6	55	6	56
7	60	7	62	7	63	7	64	7	66
8	69	8	70	8	72	8	74	8	75
9	77	9	79	9	81	9	83	9	85



TABLE VI.

DEUXIÈME PARTIE.

Valeurs du facteur $\frac{3}{2}e^2\, dL \sin L \cos L$, dans celui $(1+e^2\cos^2 L + \frac{3}{2}e^2\, dL \sin L \cos L)$.

Argument, *L* ou *Latitude*.

L.	1000″	2000″	3000″	4000″	5000″	6000″	7000″	8000″	9000″
31°	0.0000058	0.0000116	0.0000174	0.0000233	0.0000291	0.0000349	0.0000407	0.0000465	0.0000523
32	060	119	179	237	297	356	416	476	533
33	061	121	182	242	303	363	424	485	544
34	062	123	185	246	308	369	431	493	553
35	063	125	188	250	313	375	438	501	563
36	064	127	191	254	318	381	445	509	571
37	065	129	194	258	323	387	452	517	580
38	066	131	197	261	327	392	458	524	587
39	066	132	198	265	331	397	463	529	595
60° 40	067	134	201	267	334	401	468	535	601
59. 41	068	135	203	269	337	404	472	540	606
58. 42	068	136	204	272	340	408	476	544	612
57. 43	069	137	206	274	343	411	480	549	616
56. 44	069	138	207	276	345	414	483	552	621
55. 45	070	139	209	277	347	416	486	556	624
54. 46	070	139	209	279	349	418	488	558	627
53. 47	070	140	210	280	350	420	490	560	629
52. 48	070	140	210	281	351	421	491	561	631
51. 49	070	140	210	281	351	421	491	561	632
50. 50	070	140	210	281	351	421	491	561	632

TABLE VII.

Valeurs du facteur $\frac{1}{4}$ sin $2Z$, dans le terme $\frac{1}{4}$ φ^2 sin $2Z$.

ARGUMENT, *Z* ou *Azimut.*

Le facteur est { *positif* pour $Z = A$ ou $200 + A$. / *négatif* pour $Z = 100 + A$ ou $300 + A$. }

On n'entre dans la table qu'avec l'angle *A*.

Z.		$\frac{1}{4}$ sin 2Z	Dif	Z.	
0°	1	0.000785	786		9
	2	0.001571	785		8
	3	0.002356	786		7
	4	0.003142	785		6
	5	0.003927			5
			785		
	6	0.004712	785		4
	7	0.005497	786		3
	8	0.006283	785		2
	9	0.007068	785		1
1	0	0.007853		99°	0
			785		
	1	0.008638	785		9
	2	0.009423	784		8
	3	0.010207	785		7
	4	0.010992	785		6
	5	0.011777			5
			784		
	6	0.012561	784		4
	7	0.013345	785		3
	8	0.014130	784		2
	9	0.014914	784		1
2	0	0.015698		98	0
			783		
	1	0.016481	784		9
	5	0.017265	783		8
	3	0.018048	784		7
	4	0.018832	783		6
	5	0.019615			5

Z.		$\frac{1}{4}$ sin 2Z	Dif	Z.	
			783		
	6	0.020398	782		4
	7	0.021180	783		3
	8	0.021963	782		2
	9	0.022745	782		1
3°	0	0.023527		97	0
			782		
	1	0.024309	781		9
	2	0.025090	782		8
	3	0.025872	781		7
	4	0.026653	781		6
	5	0.027434			5
			780		
	6	0.028214	780		4
	7	0.028994	780		3
	8	0.029774	780		2
	9	0.030554	779		1
4	0	0.031333		96	0
			779		
	1	0.032112	779		9
	2	0.032891	779		8
	3	0.033670	778		7
	4	0.034448	777		6
	5	0.035225			5
			778		
	6	0.036003	777		4
	7	0.036780	776		3
	8	0.037556	777		2
	9	0.038333	776		1
5	0	0.039109		95	0

Z.		$\frac{1}{4}$ sin 2Z	Dif	Z.	
			775		
	1	0.039884	775		9
	2	0.040659	775		8
	3	0.041434	774		7
	4	0.042208	774		6
	5	0.042982			5
			774		
	6	0.043756	773		4
	7	0.044529	772		3
	8	0.045301	773		2
	9	0.046074	772		1
6°	0	0.046846		94°	0
			771		
	1	0.047617	770		9
	2	0.048387	771		8
	3	0.049158	770		7
	4	0.049928	769		6
	5	0.050697			5
			769		
	6	0.051466	768		4
	7	0.052234	768		3
	8	0.053002	767		2
	9	0.053769	767		1
7	0	0.054536		93	0
			766		
	1	0.055302	766		9
	2	0.056068	765		8
	3	0.056833	764		7
	4	0.057597	764		6
	5	0.058361			5

Z.		$\frac{1}{4}$ sin 2Z	Dif	Z.	
			764		
	6	0.059125	763		4
	7	0.059888	762		3
	8	0.060650	761		2
	9	0.061411	761		1
8°	0	0.062172		92°	0
			761		
	1	0.062933	760		9
	2	0.063693	759		8
	3	0.064452	758		7
	4	0.065210	758		6
	5	0.065968			5
			758		
	6	0.066726	757		4
	7	0.067483	756		3
	8	0.068239	755		2
	9	0.068994	754		1
9	0	0.069748		91	0
			753		
	1	0.070501	753		9
	2	0.071254	753		8
	3	0.072007	752		7
	4	0.072759	751		6
	5	0.073510			5
			750		
	6	0.074260	750		4
	7	0.075010	749		3
	8	0.075759	748		2
	9	0.076507	747		1
10	0	0.077254		90	0

TABLE VII. Argument, Z ou *Azimut.*

Z.	½ sin 2Z	Dif	Z.
10° 1	0.078061	747	89° 9
2	0.078747	746	8
3	0.079492	745	7
4	0.080236	744	6
5	0.080979	743	5
		743	
6	0.081722	742	4
7	0.082464	741	3
8	0.083205	740	2
9	0.083945	739	1
11 0	0.084684		89 0
		739	
1	0.085423	738	9
2	0.086161	737	8
3	0.086898	736	7
4	0.087634	735	6
5	0.088369		5
		734	
6	0.089103	733	4
7	0.089836	732	3
8	0.090568	732	2
9	0.091300	731	1
12 0	0.092031		88 0
		730	
1	0.092761	729	9
2	0.093490	728	8
3	0.094218	727	7
4	0.094945	726	6
5	0.095671		5
		725	
6	0.096396	724	4
7	0.097120	723	3
8	0.097843	722	2
9	0.098565	721	1
13 0	0.099286		87 0
		720	
1	0.100006	719	9
2	0.100725	719	8
3	0.101444	718	7
4	0.102162	717	6
5	0.102879		5
		716	
6	0.103595	714	4
7	0.104309	713	3
8	0.105022	712	2
9	0.105734	711	1
14 0	0.106445		86 0
		710	
1	0.107155	709	9
2	0.107864	708	8
3	0.108572	707	7
4	0.109279	706	6
5	0.109985		5
		705	
6	0.110690	704	4
7	0.111394	703	3
8	0.112097	701	2
9	0.112798	700	1
15 0	0.113498		85 0

Z.	½ sin 2Z	Dif	Z.
15° 1	0.114197	699	84° 9
2	0.114895	698	8
3	0.115592	697	7
4	0.116288	696	6
5	0.116983	695	5
		693	
6	0.117676	692	4
7	0.118368	691	3
8	0.119059	690	2
9	0.119749	689	1
16 0	0.120438		84 0
		688	
1	0.121126	687	9
2	0.121813	685	8
3	0.122498	684	7
4	0.123182	683	6
5	0.123865		5
		682	
6	0.124547	680	4
7	0.125227	679	3
8	0.125906	678	2
9	0.126584	677	1
17 0	0.127261		83 0
		675	
1	0.127936	674	9
2	0.128610	673	8
3	0.129283	671	7
4	0.129954	670	6
5	0.130624		5
		669	
6	0.131293	668	4
7	0.131961	667	3
8	0.132628	665	2
9	0.133293	664	1
18 0	0.133957		82 0
		662	
1	0.134619	661	9
2	0.135280	660	8
3	0.135941	659	7
4	0.136599	657	6
5	0.137256		5
		656	
6	0.137912	654	4
7	0.138566	653	3
8	0.139219	652	2
9	0.139871	650	1
19 0	0.140521		81 0
		649	
1	0.141170	647	9
2	0.141817	646	8
3	0.142463	645	7
4	0.143108	644	6
5	0.143752		5
		642	
6	0.144394	640	4
7	0.145034	639	3
8	0.145673	637	2
9	0.146310	636	1
20 0	0.146946		80 0

Z.	½ sin 2Z	Dif	Z.
20° 1	0.147581	635	79° 9
2	0.148214	633	8
3	0.148846	632	7
4	0.149476	630	6
5	0.150105	629	5
		627	
6	0.150732	626	4
7	0.151358	625	3
8	0.151983	623	2
9	0.152606	621	1
21 0	0.153227		79 0
		620	
1	0.153847	618	9
2	0.154465	617	8
3	0.155082	615	7
4	0.155697	614	6
5	0.156311		5
		612	
6	0.156923	610	4
7	0.157533	609	3
8	0.158142	608	2
9	0.158750	606	1
22 0	0.159356		78 0
		604	
1	0.159960	603	9
2	0.160563	601	8
3	0.161164	600	7
4	0.161764	598	6
5	0.162362		5
		596	
6	0.162958	595	4
7	0.163553	593	3
8	0.164146	592	2
9	0.164738	590	1
23 0	0.165328		77 0
		588	
1	0.165916	587	9
2	0.166503	585	8
3	0.167088	583	7
4	0.167671	582	6
5	0.168253		5
		580	
6	0.168833	578	4
7	0.169411	577	3
8	0.169988	575	2
9	0.170563	573	1
24 0	0.171136		76 0
		572	
1	0.171708	570	9
2	0.172278	568	8
3	0.172846	567	7
4	0.173413	565	6
5	0.173978		5
		563	
6	0.174541	562	4
7	0.175103	560	3
8	0.175663	558	2
9	0.176221	556	1
25 0	0.176777		75 0

Z.	½ sin 2Z	Dif	Z.
25° 1	0.177331	554	74° 9
2	0.177884	553	8
3	0.178435	551	7
4	0.178984	549	6
5	0.179531	547	5
		546	
6	0.180077	544	4
7	0.180621	542	3
8	0.181163	540	2
9	0.181703	539	1
26 0	0.182242		74 0
		537	
1	0.182779	535	9
2	0.183314	533	8
3	0.183847	531	7
4	0.184378	529	6
5	0.184907		5
		528	
6	0.185435	526	4
7	0.185961	524	3
8	0.186485	522	2
9	0.187007	520	1
27 0	0.187527		73 0
		519	
1	0.188046	517	9
2	0.188563	515	8
3	0.189078	513	7
4	0.189591	511	6
5	0.190102		5
		509	
6	0.190611	507	4
7	0.191118	505	3
8	0.191623	503	2
9	0.192126	501	1
28 0	0.192627		72 0
		500	
1	0.193127	498	9
2	0.193625	496	8
3	0.194121	494	7
4	0.194615	492	6
5	0.195107		5
		490	
6	0.195597	488	4
7	0.196085	486	3
8	0.196571	484	2
9	0.197055	483	1
29 0	0.197538		71 0
		481	
1	0.198019	479	9
2	0.198498	477	8
3	0.198975	474	7
4	0.199449	472	6
5	0.199921		5
		470	
6	0.200391	[illegible]	4
7	[illegible]	[illegible]	3
8	[illegible]	[illegible]	2
9	0.201592	463	1
30 0	0.202253		70 0

TABLE VII. Argument, *Z* ou *Azimut.*

Z.		½ sin 2Z	Dif	Z.	
30°	1	0.202716	461	69°	9
	2	0.203174	458		8
	3	0.203630	456		7
	4	0.204084	454		6
	5	0.204536	452		5
	6	0.204987	451		4
	7	0.205436	449		3
	8	0.205883	447		2
	9	0.206328	445		1
31	0	0.206771	443	69	0
	1	0.207211	440		9
	2	0.207649	438		8
	3	0.208085	436		7
	4	0.208519	434		6
	5	0.208951	432		5
	6	0.209381	430		4
	7	0.209809	428		3
	8	0.210235	426		2
	9	0.210660	425		1
32	0	0.211083	423	68	0
	1	0.211503	420		9
	2	0.211920	417		8
	3	0.212335	415		7
	4	0.212748	413		6
	5	0.213159	411		5
	6	0.213568	409		4
	7	0.213976	408		3
	8	0.214382	406		2
	9	0.214785	403		1
33	0	0.215186	401	67	0
	1	0.215584	398		9
	2	0.215980	396		8
	3	0.216374	394		7
	4	0.216767	393		6
	5	0.217158	391		5
	6	0.217546	388		4
	7	0.217932	386		3
	8	0.218316	384		2
	9	0.218698	382		1
34	0	0.219077	379	66	0
	1	0.219454	377		9
	2	0.219829	375		8
	3	0.220202	373		7
	4	0.220573	371		6
	5	0.220941	368		5
	6	0.221307	366		4
	7	0.221671	364		3
	8	0.222034	363		2
	9	0.222394	360		1
35	0	0.222752	358	65	0

Z.		½ sin 2Z	Dif	Z.	
35°	1	0.223107	355	64°	9
	2	0.223460	353		8
	3	0.223811	351		7
	4	0.224160	349		6
	5	0.224507	347		5
	6	0.224851	344		4
	7	0.225193	342		3
	8	0.225533	340		2
	9	0.225871	338		1
36	0	0.226207	336	64	0
	1	0.226540	333		9
	2	0.226871	331		8
	3	0.227200	329		7
	4	0.227527	327		6
	5	0.227852	325		5
	6	0.228174	322		4
	7	0.228494	320		3
	8	0.228811	317		2
	9	0.229126	315		1
37	0	0.229439	313	63	0
	1	0.229750	311		9
	2	0.230058	308		8
	3	0.230364	306		7
	4	0.230668	304		6
	5	0.230970	302		5
	6	0.231269	299		4
	7	0.231566	297		3
	8	0.231861	295		2
	9	0.232154	293		1
38	0	0.232444	290	62	0
	1	0.232732	288		9
	2	0.233018	286		8
	3	0.233301	283		7
	4	0.233582	281		6
	5	0.233861	279		5
	6	0.234138	277		4
	7	0.234412	274		3
	8	0.234684	272		2
	9	0.234953	269		1
39	0	0.235220	267	61	0
	1	0.235485	265		9
	2	0.235748	263		8
	3	0.236008	260		7
	4	0.236266	258		6
	5	0.236521	255		5
	6	0.236774	253		4
	7	0.237025	251		3
	8	0.237274	249		2
	9	0.237520	246		1
40	0	0.237764	244	60	0

Z.		½ sin 2Z	Dif	Z.	
40°	1	0.238006	242	59°	9
	2	0.238245	239		8
	3	0.238482	237		7
	4	0.238716	234		6
	5	0.238948	232		5
	6	0.239178	230		4
	7	0.239405	227		3
	8	0.239630	225		2
	9	0.239853	223		1
41	0	0.240073	220	59	0
	1	0.240291	218		9
	2	0.240507	216		8
	3	0.240720	213		7
	4	0.240931	211		6
	5	0.241139	208		5
	6	0.241345	206		4
	7	0.241549	204		3
	8	0.241750	201		2
	9	0.241949	199		1
42	0	0.242146	197	58	0
	1	0.242340	194		9
	2	0.242532	192		8
	3	0.242721	189		7
	4	0.242908	187		6
	5	0.243093	185		5
	6	0.243275	182		4
	7	0.243454	179		3
	8	0.243631	177		2
	9	0.243806	175		1
43	0	0.243979	173	57	0
	1	0.244149	170		9
	2	0.244317	168		8
	3	0.244482	165		7
	4	0.244645	163		6
	5	0.244805	160		5
	6	0.244963	158		4
	7	0.245119	156		3
	8	0.245273	154		2
	9	0.245424	151		1
44	0	0.245573	149	56	0
	1	0.245719	146		9
	2	0.245862	143		8
	3	0.246003	141		7
	4	0.246141	138		6
	5	0.246277	136		5
	6	0.246411	134		4
	7	0.246542	131		3
	8	0.246671	129		2
	9	0.246798	127		1
45	0	0.246922	124	55	0

Z.		½ sin 2Z	Dif	Z.	
45°	1	0.247044	122	54°	9
	2	0.247163	119		8
	3	0.247280	117		7
	4	0.247394	114		6
	5	0.247506	112		5
	6	0.247615	109		4
	7	0.247722	107		3
	8	0.247827	105		2
	9	0.247929	102		1
46	0	0.248029	100	54	0
	1	0.248126	97		9
	2	0.248221	95		8
	3	0.248313	92		7
	4	0.248403	90		6
	5	0.248491	88		5
	6	0.248576	85		4
	7	0.248658	82		3
	8	0.248738	80		2
	9	0.248816	78		1
47	0	0.248891	75	53	0
	1	0.248963	72		9
	2	0.249033	70		8
	3	0.249101	68		7
	4	0.249166	65		6
	5	0.249229	63		5
	6	0.249290	61		4
	7	0.249348	58		3
	8	0.249403	55		2
	9	0.249456	53		1
48	0	0.249507	51	52	0
	1	0.249555	48		9
	2	0.249600	45		8
	3	0.249643	43		7
	4	0.249684	41		6
	5	0.249722	38		5
	6	0.249758	36		4
	7	0.249791	33		3
	8	0.249822	31		2
	9	0.249851	29		1
49	0	0.249877	26	51	0
	1	0.249900	23		9
	2	0.249921	21		8
	3	0.249940	19		7
	4	0.249956	16		6
	5	0.249969	13		5
	6	0.249980	11		4
	7	0.249989	9		3
	8	0.249995	6		2
	9	0.249999	4		1
50	0	0.250000	1	50	0

TABLE VIII.

Valeur du facteur $\frac{2 \tang L}{\text{cosin } L}$ servant à déduire du produit fait avec la Table VII, le terme $\frac{1}{2} \varphi^2 \sin 2Z \frac{\tang L}{\text{cosin } L}$.

ARGUMENT, *L* ou *Latitude.*

L	$\frac{2 \tang L}{\text{cosin } L}$	Differ.	*L*	$\frac{2 \tang L}{\text{cosin } L}$	Differ.	*L*	$\frac{2 \tang L}{\text{cosin } L}$	Differ.	*L*	$\frac{2 \tang L}{\text{cosin } L}$	Differ.
30° 1	1.149073	5365	6	1.349538	6096	1	1.578856	7017	6	1.844669	8186
2	1.154458	5385	7	1.355658	6120	2	1.585903	7047	7	1.852893	8224
3	1.159861	5403	8	1.361802	6144	3	1.592979	7076	8	1.861155	8262
4	1.165283	5422	9	1.367968	6166	4	1.600086	7107	9	1.869455	8300
5	1.170725	5442	34° 0	1.374159	6191	5	1.607223	7137	41° 0	1.877793	8338
		5460			6215			7167			8377
6	1.176185	5479	1	1.380374	6240	6	1.614390	7199	1	1.886170	8417
7	1.181664	5498	2	1.386614	6263	7	1.621589	7228	2	1.894587	8456
8	1.187163	5519	3	1.392877	6288	8	1.628817	7261	3	1.903043	8495
9	1.192682	5538	4	1.399165	6313	9	1.636078	7291	4	1.911538	8536
31 0	1.198220		5	1.405478		38° 0	1.643369		5	1.920074	
		5558			6338			7321			8575
1	1.203778	5577	6	1.411816	6363	1	1.650690	7356	6	1.928649	8616
2	1.209356	5598	7	1.418179	6388	2	1.658046	7387	7	1.937265	8658
3	1.214953	5618	8	1.424567	6413	3	1.665433	7419	8	1.945923	8697
4	1.220571	5638	9	1.430980	6439	4	1.672852	7451	9	1.954620	8740
5	1.226209		35 0	1.437419		5	1.680303		42 0	1.963360	
		5658			6465			7483			8782
6	1.231867	5679	1	1.443884	6491	6	1.687786	7517	1	1.972142	8823
7	1.237546	5700	2	1.450375	6516	7	1.695303	7549	2	1.980965	8865
8	1.243246	5721	3	1.456891	6543	8	1.702852	7584	3	1.989830	8909
9	1.248967	5742	4	1.463434	6570	9	1.710436	7615	4	1.998739	8950
32 0	1.254709		5	1.470004		39 0	1.718051		5	2.007689	
		5762			6595			7651			8993
1	1.260471	5784	6	1.476599	6623	1	1.725702	7684	6	2.016682	9040
2	1.266255	5805	7	1.483222	6650	2	1.733386	7718	7	2.025722	9082
3	1.272060	5826	8	1.489872	6677	3	1.741104	7753	8	2.034804	9126
4	1.277886	5849	9	1.496549	6704	4	1.748857	7787	9	2.043930	9165
5	1.283735		56 0	1.503253		5	1.756644		43 0	2.053100	
		5870			6732			7824			9216
6	1.289605	5892	1	1.509985	6759	6	1.764468	7857	1	2.062316	9261
7	1.295497	5915	2	1.516744	6787	7	1.772325	7893	2	2.071577	9306
8	1.301412	5936	3	1.523531	6813	8	1.780218	7929	3	2.080883	9352
9	1.307348	5959	4	1.530344	6846	9	1.788147	7965	4	2.090235	9397
33 0	1.313307		5	1.537190		40° 0	1.796112		5	2.099632	
		5978			6872			8001			9445
1	1.319285	6007	6	1.544062	6901	1	1.804113	8037	6	2.109077	9490
2	1.325292	6028	7	1.550963	6929	2	1.812150	8075	7	2.118567	9535
3	1.331320	6049	8	1.557892	6959	3	1.820225	8111	8	2.128107	9580
4	1.337369	6073	9	1.564851	6988	4	1.828336	8147	9	2.137692	9630
5	1.343442		37 0	1.571839		5	1.836483		44 0	2.147322	

TABLE VIII. Argument, *L* ou *Latitude*.

L.	$\frac{2\ \text{tang}\ L}{\text{cosin}\ L}$	Differ.	*L.*	$\frac{2\ \text{tang}\ L}{\text{cosin}\ L}$	Differ.	L.	$\frac{2\ \text{tang}\ L}{\text{cosin}\ L}$	Differ.	*L.*	$\frac{2\ \text{tang}\ L}{\text{cosin}\ L}$	Differ.
		9688			11942			15043			19396
1	2.157010	9730	1	2.588356	12010	1	3.126274	15135	1	3.812138	19526
2	2.166740	9780	2	2.600366	12076	2	3.141409	15226	2	3.831664	19659
3	2.176520	9829	3	2.612442	12142	3	3.156635	15319	3	3.851323	19789
4	2.186349	9879	4	2.624584	12211	4	3.171954	15414	4	3.871112	19923
5	2.196228		5	2.636795		5	3.187368		5	3.891035	
		9929			12272			15508			20060
6	2.206157	9979	6	2.649067	12352	6	3.202876	15603	6	3.911095	20194
7	2.216136	10025	7	2.661419	12417	7	3.218479	15700	7	3.931289	20331
8	2.226161	10087	8	2.673836	12486	8	3.234179	15796	8	3.951620	20472
9	2.236248	10133	9	2.686322	12555	9	3.249975	15895	9	3.972092	20611
45° 0	2.246381		49 0	2.698877		53° 0	3.265870		57° 0	3.992703	
		10190			12627			15993			20752
1	2.256571	10232	1	2.711504	12698	1	3.281863	16092	1	4.013455	20895
2	2.266803	10290	2	2.724202	12770	2	3.297955	16194	2	4.034350	21038
3	2.277093	10343	3	2.736972	12843	3	3.314149	16294	3	4.055388	21186
4	2.287436	10397	4	2.749815	12916	4	3.330441	16396	4	4.076574	21330
5	2.297833		5	2.762731		5	3.346839		5	4.097904	
		10451			12990			16500			21480
6	2.308284	10505	6	2.775721	13062	6	3.363339	16603	6	4.119384	21629
7	2.318789	10560	7	2.787783	13140	7	3.379942	16709	7	4.141013	21779
8	2.329349	10614	8	2.801923	13213	8	3.396651	16813	8	4.162792	21933
9	2.339963	10672	9	2.815136	13291	9	3.413464	16922	9	4.184725	22087
46 0	2.350635		50 0	2.828427		54 0	3.430386		58 0	4.206812	
		10727			13368			17028			22241
1	2.361372	10782	1	2.841795	13446	1	3.447414	17136	1	4.229053	22398
2	2.372144	10841	2	2.855241	13520	2	3.464550	17247	2	4.251451	22559
3	2.382985	10897	3	2.868761	13601	3	3.481797	17357	3	4.274010	22717
4	2.393882	10956	4	2.882362	13681	4	3.499154	17469	4	4.296727	22878
5	2.404838		5	2.896043		5	3.516623		5	4.319605	
		11013			13760			17583			23042
6	2.415851	11072	6	2.909803	13841	6	3.534206	17695	6	4.342647	23205
7	2.426923	11131	7	2.923644	13923	7	3.551901	17809	7	4.365852	23372
8	2.438054	11192	8	2.937567	14004	8	3.569710	17925	8	4.389224	23542
9	2.449246	11250	9	2.951571	14087	9	3.587635	18042	9	4.412766	23710
47 0	2.460496		51 0	2.965658		55 0	3.605677		59 0	4.436476	
		11313			14171			18158			23881
1	2.471809	11372	1	2.979829	14254	1	3.623835	18278	1	4.460357	24054
2	2.483181	11434	2	2.994083	14340	2	3.642113	18398	2	4.484411	24229
3	2.494615	11496	3	3.008423	14424	3	3.660511	18520	3	4.508640	24407
4	2.506111	11558	4	3.022847	14511	4	3.679031	18638	4	4.533047	24583
5	2.517669		5	3.037358		5	3.697669		5	4.557630	
		11621			14597			18764			24762
6	2.529290	11685	6	3.051955	14686	6	3.716433	18888	6	4.582392	24945
7	2.540975	11749	7	3.066641	14774	7	3.735321	19013	7	4.607337	25129
8	2.552724	11812	8	3.081415	14862	8	3.754334	19140	8	4.632466	25314
9	2.564536	11878	9	3.096277	14954	9	3.773474	19268	9	4.657780	25502
48 0	2.576414		52 0	3.111231		56 0	3.792742		60 0	4.683282	

TABLE IX.

Conversion des Grades de *Longitude* et *Latitude* en Mètres.

L, ou *Latitude*.	Logar. du facteur $\frac{2\pi\rho}{400} \times \frac{1}{(1-e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}$	Différence.	1 Grade de Longitude.	Différence.	LATITUDE. 1 Grade.	LATITUDE. Décigrades.	*L*, ou *Latitude*.
30° 1	5.0009171	16	89217.5 m	71.5		9974.29 m	30° 1
2	5.0009187	17	89146.0	71.7		19948.58	2
3	5.0009204	16	89074.3	71.9		29922.87	3
4	5.0009220	17	89002.4	72.1		39897.16	4
5	5.0009237	16	88930.3	72.3		49871.45	5
6	5.0009253	17	88858.0	72.6		59845.74	6
7	5.0009270	17	88785.4	72.8		69820.03	7
8	5.0009287	17	88712.6	73.0		79794.32	8
9	5.0009304	16	88639.6	73.2		89768.61	9
31 0	5.0009320	17	88566.4	73.4	99742.9 m		31 0
1	5.0009337	17	88493.0	73.6		9975.45	1
2	5.0009354	17	88419.4	73.9		19950.90	2
3	5.0009371	16	88345.5	74.1		29926.35	3
4	5.0009387	17	88271.4	74.3		39901.80	4
5	5.0009404	17	88197.1	74.5		49877.25	5
6	5.0009421	18	88122.6	74.7		59852.70	6
7	5.0009439	17	88047.9	74.9		69828.15	7
8	5.0009456	18	87973.0	75.2		79803.60	8
9	5.0009474	17	87897.8	75.4		89779.05	9
32 0	5.0009491	17	87822.4	75.6	99754.5		32 0
1	5.0009508	18	87746.8	75.8		9976.63	1
2	5.0009524	18	87671.0	76.1		19953.26	2
3	5.0009542	17	87594.9	76.3		29929.89	3
4	5.0009559	18	87518.6	76.4		39906.52	4
5	5.0009577	17	87442.2	76.7		49883.15	5
6	5.0009594	18	87365.5	76.9		59859.78	6
7	5.0009612	17	87288.6	77.1		69836.41	7
8	5.0009629	18	87211.5	77.3		79813.04	8
9	5.0009647	17	87134.2	77.5		89789.67	9
0	5.0009664	18	87056.7	77.8	99766.3		33 0
1	5.0009682	17	86978.9	78.0		9977.84	1
2	5.0009699	18	86900.9	78.2		19955.68	2
3	5.0009717	17	86822.7	78.4		29933.52	3
4	5.0009734	18	86744.3	78.6		39911.36	4
5	5.0009752	18	86665.7	78.8		49889.20	5
6	5.0009770	18	86586.9	79.1		59867.04	6
7	5.0009788	18	86507.8	79.2		69844.88	7
8	5.0009806	18	86428.6	79.4		79822.72	8
9	5.0009824	17	86349.2	79.7		89800.56	9
34 0	5.0009841	18	86269.5	79.9	99778.4		34 0
1	5.0009859	18	86189.6	80.1		9979.07	1
2	5.0009877	18	86109.5	80.3		19958.14	2
3	5.0009895	17	86029.2	80.6		29937.21	3
4	5.0009912	18	85948.6	80.8		39916.28	4
5	5.0009930	18	85867.8	80.9		49895.35	5
6	5.0009948	18	85786.9	81.2		59874.42	6
7	5.0009966	18	85705.7	81.3		69853.49	7
8	5.0009984	19	85624.4	81.6		79832.56	8
9	5.0010003	18	85542.8	81.8		89811.63	9
35	5.0010021		85461.0		99790.7		35

TABLE IX. Longitudes et Latitudes en mètres.

L, ou *Latitude*.		Logar. du facteur. $\frac{2\pi\rho}{400} \times \frac{1}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}$	Différence.	1 Grade de Longitude.	Différence.	LATITUDE. 1 Grade.	Décigrades.	L, ou *Latitude*.	
	1	5.0010039	18	85379.0	82.0		9980.32		1
	2	5.0010057	18	85296.7	82.3		19960.64		2
	3	5.0010075	18	85214.2	82.5		29940.96		3
	4	5.0010093	18	85131.5	82.7		39921.28		4
	5	5.0010112	19	85048.7	82.8		49901.60		5
	6	5.0010130	18	84965.7	83.0		59881.92		6
	7	5.0010149	19	84882.5	83.2		69862.24		7
	8	5.0010167	18	84799.0	83.5		79842.56		8
	9	5.0010186	19	84715.3	83.7		89822.88		9
36°	0	5.0010204	18	84631.4	83.9	99803.2		36°	0
	1	5.0010223	19	84547.3	84.1		9981.60		1
	2	5.0010241	18	84463.0	84.3		19963.20		2
	3	5.0010260	19	84378.5	84.5		29944.80		3
	4	5.0010278	18	84293.7	84.8		39926.40		4
	5	5.0010297	19	84208.8	84.9		49908.00		5
	6	5.0010315	18	84123.6	85.2		59889.60		6
	7	5.0010334	19	84038.3	85.3		69871.20		7
	8	5.0010352	18	83952.7	85.6		79852.80		8
	9	5.0010371	19	83866.9	85.8		89834.40		9
37	0	5.0010389	18	83780.9	86.0	99816.0		37	0
	1	5.0010408	19	83694.7	86.2		9982.88		1
	2	5.0010427	19	83608.3	86.4		19965.76		2
	3	5.0010446	19	83521.7	86.6		29948.64		3
	4	5.0010464	18	83434.9	86.8		39931.52		4
	5	5.0010483	19	83347.9	87.0		49914.40		5
	6	5.0010502	19	83260.7	87.2		59897.28		6
	7	5.0010521	19	83173.2	87.5		69880.16		7
	8	5.0010540	19	83085.6	87.6		79863.04		8
	9	5.0010559	19	82997.8	87.8		89845.92		9
38	0	5.0010577	18	82909.7	88.1	99828.8		38	0
	1	5.0010596	19	82821.5	88.2		9984.18		1
	2	5.0010615	19	82733.0	88.5		19968.36		2
	3	5.0010634	19	82644.4	88.6		29952.54		3
	4	5.0010653	19	82555.5	88.9		39936.72		4
	5	5.0010672	19	82466.4	89.1		49920.90		5
	6	5.0010691	19	82377.2	89.2		59905.08		6
	7	5.0010710	19	82287.7	89.5		69889.26		7
	8	5.0010730	20	82198.0	89.7		79873.44		8
	9	5.0010749	19	82108.1	89.9		89857.62		9
39	0	5.0010768	19	82018.1	80.0	99841.8		39	0
	1	5.0010787	19	81927.8	90.3		9985.51		1
	2	5.0010806	19	81837.3	90.5		19971.02		2
	3	5.0010826	20	81746.6	90.7		29956.53		3
	4	5.0010845	19	81655.7	90.9		39942.04		4
	5	5.0010864	19	81564.6	91.1		49927.55		5
	6	5.0010883	19	81473.3	91.3		59913.06		6
	7	5.0010903	20	81381.8	91.5		69898.57		7
	8	5.0010922	19	81290.2	91.6		79884.08		8
	9	5.0010942	20	81198.3	91.9		89869.59		9
40	0	5.0010961	19	81106.1	92.2	99855.1		4	0

TABLE IX. Longitudes et Latitudes en mètres.

L, ou *Latitude.*	Logar. du facteur. $\frac{2\pi r}{400} \times \frac{1}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}$	Différence.	1 Grade de Longitude.	Différence.	LATITUDE. 1 Grade.	LATITUDE. Décigrades.	*L*, ou *Latitude.*
1	5.0010980	19	81013.8 m	92.3		9986.84 m	1
2	5.0010999	19	80921.3	92.5		19973.68	2
3	5.0011019	20	80828.6	92.7		29960.52	3
4	5.0011038	19	80735.7	92.9		39947.36	4
5	5.0011058	20	80642.6	93.1		49934.20	5
		19		93.3			
6	5.0011077	20	80549.3	93.5		59921.04	6
7	5.0011097	19	80455.8	93.7		69907.88	7
8	5.0011116	20	80362.1	93.9		79894.72	8
9	5.0011136	19	80268.2	94.1		89881.56	9
41° 0	5.0011155		80174.1		99868.4 m		41° 0
		20		94.3			
1	5.0011175	19	80079.8	94.5		9988.19	1
2	5.0011194	20	79985.3	94.6		19976.38	2
3	5.0011214	20	79890.7	94.9		29964.57	3
4	6.0011234	20	79795.8	95.1		39952.76	4
5	5.0011254		79700.7			49940.95	5
		20		95.3			
6	5.0011274	20	79605.4	95.4		59929.14	6
7	5.0011294	19	79510.0	95.7		69917.33	7
8	5.0011313	20	79414.3	95.9		79905.52	8
9	5.0011333	19	79318.4	96.1		89893.71	9
42 0	5.0011352		79222.3		99881.9		42 0
		20		96.2			
1	5.0011372	19	79126.1	96.5		9989.55	1
2	5.0011391	20	79029.6	96.7		19979.10	2
3	5.0011411	19	78932.9	96.8		29968.65	3
4	5.0011430	20	78836.1	97.1		39958.20	4
5	5.0011450		78739.0			49947.75	5
		20		97.2			
6	5.0011470	20	78641.8	97.5		59937.30	6
7	5.0011490	20	78544.3	97.6		69926.85	7
8	5.0011510	20	78446.7	97.8		79916.40	8
9	5.0011530	20	78348.9	98.0		89905.95	9
43 0	5.0011550		78250.9		99895.5		43 0
		20		98.2			
1	5.0011570	20	78152.7	98.4		9990.92	1
2	5.0011590	20	78054.3	98.6		19981.84	2
3	5.0011610	20	77955.7	98.8		29972.76	3
4	5.0011630	20	77856.9	99.0		39963.68	4
5	5.0011650		77757.9			49954.60	5
		20		99.2			
6	5.0011670	20	77658.7	99.4		59945.52	6
7	5.0011690	20	77559.3	99.6		69936.44	7
8	5.0011710	20	77459.7	99.7		79927.36	8
9	5.0011730	20	77360.0	99.9		89918.28	9
44 0	5.0011750		77260.1		99909.2		44 0
		20		100.2			
1	5.0011770	20	77159.9	100.3		9992.31	1
2	5.0011790	20	77059.6	100.5		19984.62	2
3	5.0011810	20	76959.1	100.7		29976.93	3
4	5.0011830	20	76858.4	100.9		39969.24	4
5	5.0011850		76757.5			49961.55	5
		20		101.1			
6	5.0011870	20	76656.4	101.3		59953.86	6
7	5.0011890	20	76555.1	101.5		69946.17	7
8	5.0011910	20	76453.6	101.6		79938.48	8
9	5.0011980	21	76352.0	101.9		89930.79	9
45 0	5.0011951		76250.1		99923.1		45 0

TABLE IX. Longitudes et Latitudes en mètres.

L, ou *Latitude*.	Logar. du facteur $\frac{2\pi\rho}{400} \times \frac{1}{(1-e^2\sin^2 L,)^{\frac{1}{2}}}$	Différence.	1 Grade de Longitude.	Différence.	LATITUDE. 1 Grade.	LATITUDE. Décigrades.	*L*, ou *Latitude*.
		19	ᵐ	102.0		ᵐ	
1	5.0011972	19	76148.1	102.2		9993.70	1
2	5.0011991	20	76045.9	102.4		19987.40	2
3	5.0012011	20	75943.5	102.6		29981.10	3
4	5.0012031	21	75840.9	102.8		39974.80	4
5	5.0012052		75738.1			49968.50	5
		20		103.0			
6	5.0012072	20	75635.1	103.2		59962.20	6
7	5.0012092	20	75531.9	103.4		69955.90	7
8	5.0012112	20	75428.5	103.5		79949.60	8
9	5.0012132	20	75325.0	103.7		89943.30	9
46 0	5.0012152		75221.3		ᵐ 99937.0		46 0
		20		103.9			
1	5.0012172	20	75117.4	104.1		9995.10	1
2	5.0012192	21	75013.3	104.3		19990.20	2
3	5.0012213	20	74909.0	104.5		29985.30	3
4	5.0012233	21	74804.5	104.6		39980.40	4
5	5.0012254		74699.9			49975.50	5
		20		104.9			
6	5.0012274	21	74595.0	105.0		59970.60	6
7	5.0012295	20	74490.0	105.2		69965.70	7
8	5.0012315	20	74384.8	105.4		79960.80	8
9	5.0012335	20	74279.4	105.5		89955.90	9
47 0	5.0012355		74173.9		99951.0		47 0
		20		105.8			
1	5.0012375	20	74068.1	106.0		9996.50	1
2	5.0012395	21	73962.1	106.1		19993.00	2
3	5.0012416	20	73856.0	106.3		29989.50	3
4	5.0012436	21	73749.7	106.5		39986.00	4
5	5.0012457		73643.2			49982.50	5
		20		106.7			
6	5.0012477	21	73536.5	106.9		59979.00	6
7	5.0012498	20	73429.6	107.0		69975.50	7
8	5.0012518	20	73322.6	107.2		79972.00	8
9	5.0012538	20	73215.4	107.4		89968.50	9
48 0	5.0012558		73108.0		99965.0		48 0
		20		107.6			
1	5.0012578	20	73000.4	107.8		9997.90	1
2	5.0012598	21	72892.6	108.0		19995.80	2
3	5.0012619	20	72784.6	108.1		29993.70	3
4	5.0012639	21	72676.5	108.3		39991.60	4
5	5.0012660		72568.2			49989.50	5
		20		108.5			
6	5.0012680	21	72459.7	108.6		59987.40	6
7	5.0012701	20	72351.1	108.9		69985.30	7
8	5.0012721	21	72242.2	109.0		79983.20	8
9	5.0012742	20	72133.2	109.2		89981.10	9
49 0	5.0012762		72024.0		99979.0		49 0
		21		109.4			
1	5.0012783	20	71914.6	109.6		9999.31	1
2	5.0012803	21	71805.0	109.7		19998.62	2
3	5.0012824	20	71695.3	109.9		29997.93	3
4	5.0012844	21	71585.4	110.1		39997.24	4
5	5.0012865		71475.3			49996.55	5
		20		110.3			
6	5.0012885	20	71365.0	110.5		59995.86	6
7	5.0012905	20	71254.5	110.6		69995.17	7
8	5.0012925	21	71143.9	110.8		79994.48	8
9	5.0012946	20	71033.1	111.0		89993.79	9
50 0	5.0012966		70922.1		99993.1		50 0



TABLE IX. Longitudes et Latitudes en mètres.

L, ou *Latitude*.	Logar. du facteur $\frac{1\pi\rho}{200} \times \frac{a \cdot 1}{(1-e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}$	Différence.	1 Grade de Longitude.	Differ.	LATITUDE. 1 Grade.	Décigrades.	L, ou *Latitude*.
1	5.0012987	21	m 70810.9	111.2		m 10000.72	1
2	5.0013007	20	70699.6	111.3		20001.44	2
3	5.0013028	21	70588.1	111.5		30002.16	3
4	5.0013048	20	70476.4	111.7		40002.88	4
5	5.0013069	21	70364.6	111.8		50003.60	5
6	5.0013089	20	70252.5	112.1		60004.32	6
7	5.0013109	20	70140.3	112.2		70005.04	7
8	5.0013129	20	70027.9	112.4		80005.76	8
9	5.0013150	21	69915.4	112.5		90006.48	9
51° 0	5.0013170	20	69802.7	112.7	m 100007.2		51° 0
1	5.0013191	21	69689.8	112.9		10002.12	1
2	5.0013211	20	69576.7	113.1		20004.24	2
3	5.0013232	21	69463.4	113.3		30006.36	3
4	5.0013252	20	69350.0	113.4		40008.48	4
5	5.0013272	20	69236.4	113.6		50010.60	5
6	5.0013292	20	69122.6	113.8		60012.72	6
7	5.0013313	21	69008.7	113.9		70014.84	7
8	5.0013333	20	68894.6	114.1		80016.96	8
9	5.0013354	21	68780.3	114.3		90019.08	9
52 0	5.0013374	20	68665.8	114.5	100021.2		52 0
1	5.0013394	20	68551.2	114.6		10003.53	1
2	5.0013414	20	68436.4	114.8		20007.06	2
3	5.0013435	21	68321.4	115.0		30010.59	3
4	5.0013455	20	68206.3	115.1		40014.12	4
5	5.0013476	21	68091.0	115.3		50017.65	5
6	5.0013496	20	67975.6	115.4		60021.18	6
7	5.0013517	21	67859.9	115.7		70024.71	7
8	5.0013537	20	67744.1	115.8		80028.24	8
9	5.0013558	21	67628.2	115.9		90031.77	9
53 0	5.0013578	20	67512.1	116.1	100035.3		53 0
1	5.0013598	20	67395.8	116.3		10004.94	1
2	5.0013618	20	67279.2	116.6		20009.88	2
3	5.0013638	20	67162.5	116.7		30014.82	3
4	6.0013658	20	67045.7	116.8		40019.76	4
5	5.0013678	20	66928.7	117.0		50024.70	5
6	5.0013698	20	66811.5	117.2		60029.64	6
7	5.0013719	21	66694.2	117.3		70034.58	7
8	5.0013739	20	66576.8	117.4		80039.52	8
9	5.0013760	21	66459.2	117.6		90044.46	9
54 0	5.0013780	20	66341.4	117.8	100049.4		54 0
1	5.0013800	20	66223.4	118.0		10006.34	1
2	5.0013820	20	66105.2	118.2		20012.68	2
3	5.0013840	20	65986.9	118.3		[illegible]	3
4	5.0013860	20	65868.5	118.4		[illegible]	4
5	5.0013881	21	65749.8	118.7		[illegible]	5
6	5.0013901	20	65631.0	118.8		[illegible]	6
7	5.0013921	20	65512.1	118.9		[illegible]	7
8	5.0013941	20	65393.0	119.1		[illegible]	8
9	5.0013962	21	65273.7	119.3		[illegible]	9
55 0	5.0013982	20	65154.2	119.5	100063.4		55 0

TABLE IX. Longitudes et Latitudes en mètres.

L, ou *Latitude.*		Logar. du facteur $\frac{2\pi\rho}{400} \times \frac{1}{(1-e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}$	Differ.	1 Grade de Longitude.	Differ.	LATITUDE. 1 Grade.	LATITUDE. Décigrades.	*L*, ou *Latitude.*	
	1	5.0014002	20	65034.6 m	119.6		10007.74 m		1
	2	5.0014022	20	64914.8	119.8		20015.48		2
	3	5.0014042	20	64794.9	119.9		30023.22		3
	4	5.0014062	20	64674.8	120.1		40030.96		4
	5	5.0014082	20	64554.6	120.2		50038.70		5
	6	5.0014102	20	64434.2	120.4		60046.44		6
	7	5.0014122	20	64313.6	120.6		70054.18		7
	8	5.0014142	20	64192.8	120.8		80061.92		8
	9	5.0014162	20	64071.9	120.9		90069.66		9
56°	0	5.0014182	20	63950.9	121.0	100077.4 m		56°	0
	1	5.0014202	20	63829.7	121.2		10009.14		1
	2	5.0014222	20	63708.3	121.4		20018.28		2
	3	5.0014242	20	63586.8	121.5		30027.42		3
	4	5.0014262	20	63465.1	121.7		40036.56		4
	5	5.0014282	20	63343.2	121.9		50045.70		5
	6	5.0014302	20	63221.2	122.0		60054.84		6
	7	5.0014322	20	63099.1	122.1		70063.98		7
	8	5.0014342	20	62976.8	122.3		80073.12		8
	9	5.0014362	20	62854.3	122.5		90082.26		9
57	0	5.0014382	20	62731.7	122.6	100091.4		57	0
	1	5.0014402	20	62608.9	122.8		10010.49		1
	2	5.0014422	20	62485.9	123.0		20020.98		2
	3	5.0014442	20	62362.8	123.1		30031.47		3
	4	5.0014462	20	62239.6	123.2		40041.96		4
	5	5.0014482	20	62116.2	123.4		50052.45		5
	6	5.0014502	20	61992.6	123.6		60062.94		6
	7	5.0014522	20	61868.9	123.7		70073.43		7
	8	5.0014542	20	61745.0	123.9		80083.92		8
	9	5.0014562	20	61621.0	124.0		90094.41		9
58	0	5.0014581	19	61496.8	124.3	100104.9		58	0
	1	5.0014601	20	61372.5	124.5		10011.86		1
	2	5.0014620	19	61248.0	124.6		20023.72		2
	3	5.0014640	20	61123.4	124.8		30035.58		3
	4	5.0014660	20	60998.6	124.9		40047.44		4
	5	5.0014680	20	60873.7	125.1		50059.30		5
	6	5.0014699	19	60748.6	125.1		60071.16		6
	7	5.0014719	20	60623.3	125.3		70083.02		7
	8	5.0014738	19	60497.9	125.4		80094.88		8
	9	5.0014758	20	60372.4	125.5		90006.74		9
59	0	5.0014777	19	60246.7	125.7	100118.6		59	0
	1	5.0014797	20	60120.8	125.9		10013.21		1
	2	5.0014816	19	59994.8	126.0		20026.42		2
	3	5.0014836	20	59868.7	126.1		30039.63		3
	4	5.0014855	19	59742.4	126.3		40052.84		4
	5	5.0014875	20	59616.0	126.4		50066.05		5
	6	5.0014895	20	59489.4	126.6		60079.26		6
	7	5.0014915	20	59362.6	126.8		70092.47		7
	8	5.0014935	20	59235.7	126.9		80105.68		8
	9	5.0014955	20	59108.7	127.0		90118.89		9
60	0	5.0014974	19	58981.5	127.2	100132.1		60	0

EXPLICATION ET USAGE

DES TABLES DE RÉFRACTIONS

DE M. LA PLACE.

DEPUIS 0° jusqu'à 74° de distance au zénith, la table est calculée d'après la formule de la page 271 du 4e volume de la Mécanique Céleste, réduite aux quantités suivantes :

$$\delta\theta = \frac{\alpha(1+y)\,\text{tang.}\,\theta}{(1+0{,}00375x)\left(1+\frac{x}{5412}\right)} + \frac{\frac{1}{2}\alpha^2(1+y)}{(1+0{,}00375x)\left(1+\frac{x}{5412}\right)} - \cdot \frac{(1+2\cos^2\theta)\,\text{tang.}\,\theta}{\cos^2\theta}$$

$$- \frac{\alpha(1+y)}{(1+0{,}00375x)\left(1+\frac{x}{5412}\right)} \times 0{,}00125254\,\frac{\text{tang}\,\theta}{\cos^2\theta} - \alpha.0{,}00375\,x.0{,}00125254\,\frac{\text{tang}\,\theta}{\cos^2\theta}$$

α dans cette formule représente un coefficint constant, dont la valeur est $60'',616$; $0.^{m}76\,(1+y)$ est l'élévation observée du baromètre ; x le nombre de degrés du thermomètre centigrade, depuis la température de la glace fondante; θ est la distance apparente de l'astre au zénith ; et $\delta\theta$ la réfraction. On a calculé cette formule de degré en degré, en supposant x et y nuls. Depuis 74° jusqu'à l'horizon on a employé la formule de la page 264 de la Mécanique Céleste, réduite à la forme suivante :

$$\delta\theta = 2790'',2\,(0{,}75479 - 0{,}49042\,T^2)\sin\theta.\frac{2\psi(T)}{\sqrt{\pi}} + 10021'',4\sin 2\theta$$

Dans cette formule

$$T = 25{,}961924\cos\theta,\quad \text{et}\ \psi(T) = c^{T^2}\int \delta t\, c^{-t^2}$$

l'intégrale étant prise depuis $t = T$ jusqu'à l'infini, et c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, π est le rapport de la demi-circonférence au rayon.

Au 74e degré, les deux formules précédentes donnent le même résultat. A côté du nombre de secondes qui indique la réfraction, on a placé leurs logarithmes avec quatre décimales seulement. On a formé une table des logarithmes du facteur $(1+y)$ pour toutes les hauteurs du baromètre, depuis $0^{m}.710$ jusqu'à $0^{m}.810$. On a pareillement formé une table des logarithmes du facteur

$$\frac{1}{(1+0{,}00375x)\left(1+\frac{x}{5412}\right)},\ \text{depuis}\ x = -35^{d}\ \text{jusqu'à}\ x = +35^{d};$$

mais pour n'avoir dans les corrections dépendantes de la température et de la hauteur du baromètre,

à ajouter que des nombres positifs, on a ajouté respectivement aux logarithmes des deux dernières tables dont on vient de parler, leur plus grand logarithme négatif, pris positivement, et on l'a retranché des logarithmes de la première table.

On a écrit à côté de ces logarithmes les nombres de secondes qui leur répondent : on a formé ainsi la table X, 1re partie, qui représente les réfractions correspondantes à 35d du thermomètre et à la hauteur de 0m.710 du baromètre.

La petite table, 2e partie, est le 4e terme de la première expression de $\delta\theta$, en y supposant $x=10$. On n'a calculé ce terme que depuis $\theta=66$ jusqu'à $\theta=85$; au-dessous la valeur est insensible; au-dessus, les réfractions sont trop incertaines pour qu'on puisse y appliquer avec quelque exactitude les corrections relatives à la température et à la hauteur du baromètre. Voyez la Mécanique Céleste, livre X, chapitre I.

On a ajouté à la fin de la première partie de la table deux logarithmes qui servent à faire l'interpolation dans les cas extrêmes.

Pour trouver la réfraction, il suffira d'ajouter les logarithmes des 3e et 4e parties de la table (correspondans aux degrés observés du thermomètre, et à la hauteur observée du baromètre), au logarithme de la réfraction pris dans la table, 1re partie, correspondant à la hauteur apparente observée; on aura ainsi le logarithme de la réfraction, et par la table 1re partie, on verra à quel nombre de secondes il répond.

Exemple : On demande la réfraction pour 72° 15′ de distance apparente au zénith, le baromètre étant à 0m.752, et le thermomètre à — 7d.

Dans la table X, 1re partie, vis-à-vis 72°................	log.	2.1801
Pour 15′. partie proportionnelle............................		65
3e partie de la table X, vis-à-vis 0m.752		250
4e partie de la table X, vis-à-vis — 7d.....................		685
Somme..........................		2.2801

Ce logarithme cherché dans la table X, 1re partie, tombe entre les logarithmes correspondans à 75° et 76° de distance au zénith, et vis-à-vis 75 on trouve 182″,7; retranchant ensuite le logarithme 2.2618 qui se trouve sur la même ligne du logarithme ci-dessus, on a pour différence 183.

Entre les logarithmes répondans à 75 et 76, la différence est 303, et celle des nombres est 13″.2.

Faisant ensuite la proportion

$$303 : 183 :: 13''.2 : x = 8'',0$$

Cette valeur de x ajoutée à la réfraction ci-dessus 182.7, on a 190″,7 : on se dispensera de ce calcul de la partie proportionnelle, si l'on a sous la main une table de logarithmes.

Si l'on veut tenir compte du petit terme de la 2e partie de la table, avec 72°.15′ on y prendra —0″.1 et la réfraction sera définitivement 190″,6.

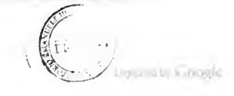
Nota. Cette Table paraît ici pour la première fois. M. *Delambre* qui, d'après l'invitation de M. *Laplace*, m'en a expliqué la formation et l'usage, doit aussi l'insérer à la suite de ses *Tables du Soleil*. Elle donne aussi les réfractions pour les distances vraies au Zénith, comme je le ferai voir à la Table XI.

TABLE X.

Réfractions pour les distances apparentes au Zénith.

PREMIÈRE PARTIE.

Distance au Zénith.	Réfraction.	Différence.	Logarithmes.	Différence.	Distance au Zénith.	Réfraction.	Différence.	Logarithmes.	Différence
0°	0"0				41°	43"2	1"5	1.6351	153
1	0.8				42	44.7	1.5	1.6503	152
2	1.7		0.2395		43	46.3	1.6	1.6655	152
3	2.6	0"9	0.4149	1754	44	47.9	1.6	1.6807	152
4	3.5	0.9	0.5412	1263	45	49.6	1.7	1.6958	151
5	4.3	0.8	0.6381	969	46	51.4	1.8	1.7109	151
6	5.2	0.9	0.7180	799	47	53.2	1.8	1.7261	152
7	6.1	0.9	0.7852	672	48	55.1	1.9	1.7413	152
8	7.0	0.9	0.8441	589	49	57.1	2.0	1.7565	152
9	7.9	0.9	0.8961	520	50	59.1	2.0	1.7718	153
10	8.8	0.9	0.9426	465	51	61.3	2.2	1.7872	154
11	9.7	0.9	0.9849	423	52	63.5	2.2	1.8027	155
12	10.6	0.9	1.0237	388	53	65.8	2.3	1.8183	156
13	11.5	0.9	1.0597	366	54	68.2	2.4	1.8341	158
14	12.4	0.9	1.0930	333	55	70.8	2.6	1.8501	160
15	13.3	0.9	1.1244	314	56	73.6	2.7	1.8662	161
16	14.3	1.0	1.1538	294	57	76.3	2.8	1.8826	164
17	15.2	0.9	1.1816	278	58	79.3	3.0	1.8993	167
18	16.2	1.0	1.2081	265	59	82.4	3.1	1.9162	169
19	17.1	0.9	1.2332	251	60	85.8	3.4	1.9334	172
20	18.1	1.0	1.2572	240	61	89.3	3.5	1.9510	176
21	19.1	1.0	1.2804	232	62	93.1	3.8	1.9689	179
22	20.1	1.0	1.3026	222	63	97.1	4.0	1.9873	184
23	21.1	1.0	1.3242	216	64	101.4	4.3	2.0061	188
24	22.1	1.0	1.3448	206	65	106.0	4.6	2.0254	193
25	23.2	1.1	1.3648	200	66	111.0	5.0	2.0453	199
26	24.2	1.0	1.3844	196	67	116.4	5.4	2.0658	205
27	25.3	1.1	1.4033	189	68	122.2	5.8	2.0869	211
28	26.4	1.1	1.4219	186	69	128.5	6.3	2.1089	220
29	27.5	1.1	1.4399	180	70	135.4	6.9	2.1317	228
30	28.7	1.2	1.4576	177	71	143.0	7.6	2.1554	237
31	29.8	1.1	1.4749	173	72	151.4	8.4	2.1801	247
32	31.0	1.2	1.4919	170	73	160.7	9.3	2.2060	259
33	32.2	1.2	1.5086	167	74	171.1	10.4	2.2332	272
34	33.5	1.3	1.5251	165	75	182.7	11.6	2.2618	286
35	34.8	1.3	1.5413	162	76	195.9	13.2	2.2921	303
36	36.1	1.3	1.5573	160	77	211.1	15.2	2.3244	323
37	37.4	1.3	1.5732	159	78	228.4	17.3	2.3588	344
38	38.8	1.4	1.5888	156	79	248.7	20.3	2.3957	369
39	40.2	1.4	1.6043	155	80	272.7	24.0	2.4357	400
40	41.7	1.5	1.6198	155					



SUITE DE LA TABLE X.

PREMIÈRE PARTIE.

Distance au Zénith.	Réfraction.	Différence.	Logarithmes.	Différence.
81° 0′	301″4		2.4791	
		34″9		476
82. 0	336.3		2.5267	
		43.4		527
83. 0	379.7		2.5794	
		25.8		286
83.30	405.5		2.6080	
		29.3		303
84. 0	434.8		2.6383	
		33.4		322
84.30	468.2		2.6705	
		38.6		343
85.0	506.8		2.7048	
		44.7		369
85.30	551.5		2.7417	
		52.4		393
86. 0	603.9		2.7810	
		62.1		425
86.30	666.0		2.8235	
		74.2		459
87. 0	740.2		2.8694	
		89.8		497
87.30	830.0		2.9191	
		109.9		540
88. 0	939.9		2.9731	
		136.1		587
88.30	1076.0		3.0318	
		170.0		637
89. 0	1246.0		3.0955	
		213.8		688
89.30	1459.8		3.1643	
		268.1		732
90. 0	1727.9		3.2375	
		200.0		466
	1927.9		3.2841	
		200.0		438
	2127.9		3.3279	

II PARTIE.

Distance au Zénith.	Réfraction.
85°	− 4″3
84	− 2.5
83	− 1.6
82	− 1.0
81	− 0.7
80	− 0.5
79	− 0.4
78	− 0.3
77	− 0.2
76	− 0.2
75	− 0.2
74	− 0.1
73	− 0.1
72	− 0.1
71	− 0.1
70	− 0.1
69	− 0.1
68	− 0.1
67	− 0.0
66	− 0.0



SUITE DE LA TABLE X.

III PARTIE. IV PARTIE.

Logarithmes du facteur dépendant de la hauteur du Baromètre.						Logarithmes du facteur dépendant de la hauteur du Thermomètre.			
Hauteur du Baromètre.	Logarithmes	Hauteur du Baromètre.	Logarithmes	Hauteur du Baromètre.	Logarithmes	Hauteur du Thermomèt. centigrade.	Logarithmes	Hauteur du Thermomèt. centigrade.	Logarithmes.
m		m		m					
0.710	0	0.750	238	0.790	464	+ 35^{d}	0	— 0^{d}	564
0.711	6	0.751	244	0.791	469	+ 34	15	— 1	581
0.712	12	0.752	250	0.792	475	+ 33	30	— 2	598
0.713	18	0.753	255	0.793	480	+ 32	46	— 3	615
0.714	24	0.754	261	0.794	486	+ 31	61	— 4	633
0.715	30	0.755	267	0.795	491	+ 30	77	— 5	650
0.716	37	0.756	273	0.796	496	+ 29	92	— 6	667
0.717	43	0.757	278	0.797	502	+ 28	108	— 7	685
0.718	49	0.758	284	0.798	507	+ 27	123	— 8	703
0.719	55	0.759	290	0.799	513	+ 26	139	— 9	720
0.720	61	0.760	296	0.800	518	+ 25	154	— 10	738
0.721	67	0.761	301	0.801	524	+ 24	170	— 11	756
0.722	73	0.762	307	0.802	529	+ 23	186	— 12	773
0.723	79	0.763	313	0.803	535	+ 22	202	— 13	791
0.724	85	0.764	318	0.804	540	+ 21	218	— 14	809
0.725	91	0.765	324	0.805	545	+ 20	234	— 15	827
0.726	97	0.766	330	0.806	551	+ 19	249	— 16	845
0.727	103	0.767	335	0.807	556	+ 18	266	— 17	863
0.728	109	0.768	341	0.808	562	+ 17	282	— 18	882
0.729	115	0.769	347	0.809	567	+ 16	298	— 19	900
0.730	121	0.770	352	0.801	572	+ 15	314	— 20	918
0.731	127	0.771	358			+ 14	330	— 21	937
0.732	133	0.772	364			+ 13	346	— 22	955
0.733	138	0.773	369			+ 12	363	— 23	974
0.734	144	0.774	375			+ 11	379	— 24	993
0.735	150	0.775	380			+ 10	396	— 25	1011
0.736	156	0.776	386			+ 9	412	— 26	1030
0.737	162	0.777	392			+ 8	429	— 23	1049
0.738	168	0.778	397			+ 7	446	— 28	1068
0.739	174	0.779	403			+ 6	462	— 29	1087
0.740	180	0.780	408			+ 5	479	— 30	1106
0.741	186	0.781	414			+ 4	496	— 31	1125
0.742	191	0.782	419			+ 3	513	— 32	1145
0.743	197	0.783	425			+ 2	530	— 33	1164
0.744	203	0.784	431			+ 1	546	— 34	1183
						+ 0	564	— 35	1203
0.745	209	0.785	436						
0.746	215	0.786	442						
0.747	221	0.787	447						
0.748	226	9.788	453						
0.749	232	0.789	458						

TABLE XI.

CORRECTIONS POUR LES RÉFRACTIONS

DONNÉES PAR LA TABLE SUIVANTE.

La pression de l'atmosphère étant différente de $0^m,76$, et sa température autre que 12°5 centigrades.

BAROMETRE. —	BAROMETRE. +	x
p. l. met. 28. 0 = 0.758	p. l. met. 28. 0 = 0.758	0.0000
27.11 = 0.756	1 = 0.760	0.0030
10 = 0.753	2 = 0.762	0.0060
9 = 0.751	3 = 0.765	0.0089
8 = 0.749	4 = 0.767	0.0119
7 = 0.747	5 = 0.769	0.0149
6 = 0.744	6 = 0.772	0.0179
5 = 0.742	7 = 0.774	0.0208
4 = 0.740	8 = 0.776	0.0238
3 = 0.738	9 = 0.778	0.0268
2 = 0.735	10 = 0.780	0.0298
1 = 0.733	11 = 0.783	0.0327
27. 0 = 0.731	29. 0 = 0.785	0.0357
26.11 = 0.729	1 = 0.787	0.0387
10 = 0.726	2 = 0.789	0.0417
9 = 0.724	3 = 0.792	0.0446
8 = 0.722	4 = 0.794	0.0476
7 = 0.719	5 = 0.796	0.0506
6 = 0.717	6 = 0.798	0.0536
5 = 0.715	7 = 0.801	0.0565
4 = 0.713	8 = 0.803	0.0595
3 = 0.711	9 = 0.806	0.0625
2 = 0.708	10 = 0.808	0.0655
1 = 0.706	11 = 0.810	0.0685
26. 0 = 0.704	30. 0 = 0.812	0.0714
25.11 = 0.701	1 = 0.814	0.0744
10 = 0.699	2 = 0.816	0.0774
9 = 0.697	3 = 0.819	0.0804
8 = 0.695	4 = 0.821	0.0833
7 = 0.692	5 = 0.823	0.0863
6 = 0.690	30. 6 = 0.825	0.0893

THERMOMETRE. Réaumur. = Centig.	y	Diff.
+ 30° = 37°.5	— 0.0992	45
+ 29 = 36.25	— 0.0947	45
+ 28 = 35.	— 0.0902	46
+ 27 = 33.75	— 0.0856	47
+ 26 = 32.5	— 0.0809	47
+ 25 = 31.25	— 0.0762	47
+ 24 = 30.	— 0.0715	47
+ 23 = 28.75	— 0.0668	49
+ 22 = 27.5	— 0.0619	49
+ 21 = 26.25	— 0.0570	49
+ 20 = 25.	— 0.0521	50
+ 19 = 23.75	— 0.0471	50
+ 18 = 22.5	— 0.0421	50
+ 17 = 21.25	— 0.0371	52
+ 16 = 20.	— 0.0319	52
+ 15 = 18.75	— 0.0267	52
+ 14 = 17.5	— 0.0215	53
+ 13 = 16.25	— 0.0162	53
+ 12 = 15.	— 0.0109	54
+ 11 = 13.75	— 0.0055	55
+ 10 = 12.5	— 0.0000	55
+ 9 = 11.25	+ 0.0055	56
+ 8 = 10.	+ 0.0111	57
+ 7 = 8.75	+ 0.0168	57
+ 6 = 7.5	+ 0.0225	58
+ 5 = 6.25	+ 0.0283	58
+ 4 = 5.	+ 0.0341	59
+ 3 = 3.75	+ 0.0400	60
+ 2 = 2.5	+ 0.0460	61
+ 1 = 1.25	+ 0.0521	61
+ 0 = 0.	+ 0.0582	62
— 1 = 1.25	+ 0.0644	62
— 2 = 2.5	+ 0.0706	64
— 3 = 3.75	+ 0.0770	64
— 4 = 5.	+ 0.0834	65
— 5 = 6.25	+ 0.0899	65
— 6 = 7.5	+ 0.0964	67
— 7 = 8.75	+ 0.1031	67
— 8 = 10.	+ 0.1098	69
— 9 = 11.25	+ 0.1157	69
— 10 = 12.5	+ 0.1165	70
— 11 = 13.75	+ 0.1236	70
— 12 = 15.	+ 0.1306	70
— 13 = 16.25	+ 0.1376	72
— 14 = 17.5	+ 0.1448	73
— 15 = 18.75	+ 0.1521	

USAGE

DE CES TABLES.

Soit r la réfraction moyenne, et dr la correction ; la réfraction absolue ou actuelle sera

$$= r + dr.$$

Cela posé, avec la hauteur du baromètre prenez dans la première table un nombre x, auquel vous donnerez le signe —, si le baromètre est au-dessous de $0^m 76$ ($28^{pouc} 0l$), et le signe + dans le cas contraire.

Avec la hauteur du thermomètre, prenez dans la deuxième table, un nombre y, avec le signe qui le précède. La fonction ($x + y + xy$) sera le facteur par lequel il faudra multiplier la réfraction moyenne pour avoir la correction dr dont cette réfraction a besoin. Le plus souvent on peut négliger le produit xy; mais en le formant, il faut faire attention aux signes algébriques de x et y. (Voyez pour exemple la page 262).

N. B. On peut aussi, à l'aide de la table X, trouver les réfractions pour les distances vraies au Zenith. *En effet*, soit δ' la distance vraie proposée : cherchez dans cette table la réfraction $\delta\delta'$ pour δ' de distance apparente, en ayant égard à la pression de l'atmosphère et à sa température (*Usage de la table X*). Cherchez de nouveau la réfraction qui correspond à la distance apparente $\delta' - \delta\delta'$ pour la même pression et la même température. Cette seconde réfraction sera celle que l'on desire.



TABLE XII.

Réfractions moyennes pour les distances vraies au Zénith.

Distance vraie.	Réfraction.	Différence.	Distance vraie.	Réfraction.	Différence.	Distance vraie.	Réfraction.	Différence.
0°	0' 0"0	1"0	45°	0' 56"6	2"0	82° 0	6' 22"7	7.4
1	1.0	1.0	46	0.58.6	2.1	10	6.30.1	7.7
2	2.0	1.0	47	1. 0.7	2.1	20	6.37.8	8.0
3	3.0	1.0	48	1. 2.8	2.3	30	6.45.8	8.3
4	4.0	1.0	49	1. 5.1	2.3	40	6.54.1	8.6
5	5.0	1.0	50	1. 7.4	2.4	50	7. 2.7	9.0
6	6.0	1.0	51	1. 9.8	2.6	83. 0	7.11.7	9.3
7	7.0	1.0	52	1.12.4	2.6	10	7.21.0	9.7
8	8.0	1.0	53	1.15.0	2.8	20	7.30.7	10.1
9	9.0	1.0	54	1.17.8	2.9	30	7.40.8	10.5
10	10.0	1.0	55	1.20.7	3.1	40	7.51.3	11.0
11	11.0	1.0	56	1.23.8	3.2	50	8. 2.3	11.5
12	12.0	1.1	57	1.27.0	3.4	84. 0	8.13.8	11.9
13	13.1	1.0	58	1.30.4	3.6	10	8.25.7	12.5
14	14.1	1.1	59	1.34.0	3.8	20	8.38.2	13.0
15	15.2	1.0	60	1.37.8	4.0	30	8.51.2	13.7
16	16.2	1.1	61	1.41.8	4.3	40	9. 4.9	14.3
17	17.3	1.1	62	1.46.1	4.6	50	9.19.2	14.9
18	18.4	1.1	63	1.50.7	4.9	85. 0	9.34.1	15.7
19	19.5	1.1	64	1.55.6	5.2	10	9.49.8	16.5
20	20.6	1.1	65	2. 0.8	5.7	20	10. 6.3	17.3
21	21.7	1.2	66	2. 6.5	6.1	30	10.23.6	18.2
22	22.9	1.1	67	2.12.6	6.5	40	10.41.8	19.2
23	24.0	1.2	68	2.19.1	7.3	50	11. 1.0	20.2
24	25.2	1.2	69	2.26.4	7.9	86. 0	11.21.2	21.0
25	26.4	1.2	70	2.34.3	8.7	10	11.42.2	22.5
26	27.6	1.3	71	2.43.0	9.5	20	12. 4.7	23.6
27	28.9	1.2	72	2.52.5	10.6	30	12.28.3	24.9
28	30.1	1.3	73	3. 3.1	11.9	40	12.53.2	26.2
29	31.4	1.3	74	3.15.0	13.2	50	13.19.4	27.9
30	32.7	1.3	75	3.28.2	15.1	87. 0	13.47.3	29.4
31	34.0	1.4	76	3.43.3	17.2	10	14.16.7	31.0
32	35.4	1.4	77	4. 0.5	19.8	20	14.47.7	32.9
33	36.8	1.4	78	4.20.3	23.0	30	15.20.6	34.8
34	38.2	1.5	79	4.43.3	27.1	40	15.55.4	37.3
35	39.7	1.5	80. 0	5.10.4	5.1	50	16.32.7	38.5
36	41.2	1.5	80.10	5.15.5	5.2	88. 0	17.11.2	41.3
37	42.7	1.6	20	5.20.7	5.3	10	17.52.6	43.6
38	44.3	1.6	30	6.26.0	5.5	20	18.36.2	45.8
39	45.9	1.6	40	5.31.5	5.7	30	19.22.0	49.1
40	47.5	1.7	50	5.37.2	5.9	40	20.11.1	51.7
41	49.2	1.8	81. 0	5.43.1	6.0	50	21. 2.8	54.5
42	51.0	1.8	10	5.49.4	6.3	89. 0	21.57.3	57.4
43	52.8	1.9	20	5.55.4	6.5	10	22.54.7	60.6
44	54.7	1.9	30	6. 1.9	6.7	20	23.55.3	63.6
45	56.6		40	6. 8.6	6.9	30	24.58.9	66.9
			50	6.15.5	7.2	40	26. 5.8	70.1
			82. 0	6.22.7		50	27.15.9	73.5
						90. 0	28.29.4	76.8
						10	29.46.2	79.9
						20	31. 6.1	83.2
						30	32.29.3	86.5
						40	33.55.8	89.6
						50	35.25.4	92.8
						91. 0	36.58.2	



TABLE XIII

pour faciliter la construction des Tables de réduction au méridien pour les étoiles.

Ang. horaire de l'étoile, en temps.	Diff. log. sin² ½ P.	Ang. horaire de l'étoile, en temps.	Diff. log. sin² ½ P.	Ang. horaire de l'étoile, en temps.	Diff. log. sin² ½ P.	Ang. horaire de l'étoile, en temps.	Diff. log. sin² ½ P.	Ang. horaire de l'étoile, en temps.	Diff. log. sin² ½ P.
0′ 0″		8′ 0″	1829	16′ 0″	909	24′ 0″	605	32′ 0	453
10	3.12127	10	1791	10	900	10	601	10	450
20	60206	20	1754	20	890	20	596	20	448
30	35218	30	1720	30	881	30	592	30	446
40	24988	40	1687	40	873	40	589	40	444
50	19382	50	1654	50	864	50	584	50	441
1. 0	15836	9. 0	1623	17. 0	855	25. 0	580	33. 0	439
10	13399	10	1594	10	847	10	577	10	437
20	11598	20	1565	20	839	20	573	20	435
30	10231	30	1537	30	831	30	569	30	432
40	9151	40	1510	40	823	40	565	40	430
50	8279	50	1485	50	815	50	562	50	429
2. 0	7557	10. 0	1460	18. 0	808	26. 0	558	34. 0	426
10	6943	10	1435	10	800	10	554	10	424
20	6436	20	1412	20	792	20	551	20	422
30	5993	30	1388	30	786	30	547	30	419
40	5606	40	1369	40	779	40	544	40	418
50	5265	50	1347	50	775	50	541	50	416
3. 0	4965	11. 0	1326	19. 0	765	27. 0	537	35. 0	414
10	4696	10	1306	10	758	10	534	10	411
20	4455	20	1286	20	752	20	531	20	410
30	4238	30	1268	30	745	30	527	30	408
40	4041	40	1249	40	738	40	524	40	406
50	3861	50	1232	50	732	50	521	50	404
4. 0	3696	12. 0	1215	20. 0	727	28. 0	518	36. 0	403
10	3536	10	1198	10	720	10	515	10	400
20	3417	20	1181	20	715	20	512	20	399
30	3278	30	1166	30	708	30	508	30	396
40	3158	40	1150	40	703	40	506	40	395
50	3048	50	1135	50	697	50	503	50	393
5. 0	2945	13. 0	1120	21. 0	692	29. 0	500	37. 0	391
10	2848	10	1107	10	686	10	497	10	390
20	2757	20	1092	20	681	20	494	20	387
30	2673	30	1079	30	675	30	492	30	386
40	2593	40	1065	40	671	40	489	40	385
50	2517	50	1053	50	665	50	486	50	383
6. 0	2447	14. 0	1040	22. 0	660	30. 0	483	38. 0	381
10	2380	10	1027	10	655	10	480	10	379
20	2316	20	1016	20	650	20	478	20	378
30	2256	30	1004	30	645	30	475	30	376
40	2199	40	992	40	641	40	473	40	374
50	2145	50	981	50	635	50	470	50	372
7. 0	2093	15. 0	970	23. 0	631	31. 0	468	39. 0	371
10	2043	10	960	10	627	10	465	10	370
20	1997	20	949	20	622	20	462	20	368
30	1952	30	938	30	618	30	460	30	366
40	1909	40	929	40	613	40	458	40	365
50	1867	50	919	50	609	50	455	50	363
8. 0	1829	16. 0	909	24. 0	605	32. 0	453	40. 0	362

TABLE XIII.

Pour faciliter la construction des Tables de réduction au Méridien pour les Etoiles.

Angle horaire de l'étoile, en temps.	Différence logar. $\sin^4 \frac{1}{2} P$.
0h 0′	0.00000
1	9.35514
2	1.20412
3	70436
4	49974
5	38764
6	31670
7	26778
8	23194
9	20458
10	18302
11	16554
12	15112
13	13900
14	12872
15	11980
16	11208
17	10526
18	9926
19	9386
20	8906
21	8470
22	8076
23	7714
24	7388
25	7084
26	6808
27	6548
28	6310
29	6088
30	5882
31	5688
32	5506
33	5336
34	5178
35	5026
36	4884
37	4748
38	4624
39	4500
40	4388

On a vu, page 288, comment on forme les logarithmes constans *a* et *b* pour les Tables de réduction au méridien ; c'est à ces logarithmes constans qu'il faut ajouter les différences logarithmiques de $\sin^2 \frac{1}{2} P$, et $\sin^4 \frac{1}{2} P$: voici un exemple de ces calculs.

Calculs pour le passage supérieur de la polaire, 21 *frimaire an* 5 (11 déc. 1796).

	Log. *a*..........	4.12093
	Diff. log. pour 10″..........	3.12127
0″0017		7.24220
	20..........	60620
0.0071		7.84840
	30..........	35218
0.0159		8.20058
	40..........	24988
0.0282		8.45046
	50..........	19382
0.0441		8.64428
	1′ 0..........	15836
0.0635		8.80264
	1′ 10..........	13390
0.0864		8.93654
	1′ 20..........	11598
0.1128		9.05252
	1′ 30..........	10231
0.1428		9.15483
		etc.

	Log. *b*..........	2.67124
	Diff. log. pour 1′..........	9.35514
0″0000		2.02638
	2..........	1.20412
0.0000		3.23050
	3..........	70436
0.0000		3.93486
	4..........	49974
0.0000		4.43460
	5..........	38764
0.0000		4.82224
	6..........	31670
0.0000		5.13894
	7..........	26778
0.0000		5.40672
	8..........	23194
0.0000		5.63866
	9..........	20458
0.0001		5.84324
	10..........	18302
0.0001		6.02626
		etc.

On a ainsi, par des additions successives, les logarithmes des deux nombres dont la réunion formera chaque terme de la Table.

Le second terme est si petit, que c'est ici, vers 9′, qu'il commence à valoir à-peu-près 0″0001 ; il varie peu dans l'intervalle de 1′ ; on l'étendra aux dixaines de seconde par une interpolation facile.

Pour les signes des deux nombres de chaque terme de la Table, voyez pages 286 et 288.

TABLE XIV.

Réduction au Méridien pour les Observations faites au cercle de Borda.

Argument, Angle horaire en temps.

Sec.	0'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'
0"	0"0	2"0	7"8	17"7	31"4	49"1	70"7	96"2
1	0.0	2.0	8.0	17.9	31.7	49.4	71.1	96.9
2	0.0	2.1	8.1	18.1	31.9	49.7	71.5	97.1
3	0.0	2.2	8.2	18.3	32.2	50.1	71.9	97.6
4	0.0	2.2	8.4	18.5	32.5	50.4	72.3	98.1
5	0.0	2.3	8.5	18.7	32.7	50.7	72.7	98.5
6	0.0	2.4	8.7	18.9	33.0	51.1	73.1	99.0
7	0.0	2.4	8.8	19.1	33.3	51.4	73.5	99.4
8	0.0	2.5	8.9	19.3	33.5	51.7	73.9	99.9
9	0.0	2.6	9.1	19.5	33.8	52.1	74.3	100.4
10	0.1	2.7	9.2	19.7	34.1	52.4	74.7	100.8
11	0.1	2.7	9.4	19.9	34.4	52.7	75.1	101.3
12	0.1	2.8	9.5	20.1	34.6	53.1	75.5	101.8
13	0.1	2.9	9.6	20.3	34.9	53.4	75.9	101.3
14	0.1	3.0	9.8	20.5	35.2	53.8	76.3	102.7
15	0.1	3.1	9.9	20.7	35.5	54.1	76.7	103.2
16	0.1	3.1	10.1	20.9	35.7	54.5	77.1	103.7
17	0.2	3.2	10.2	21.2	36.0	54.8	77.5	104.2
18	0.2	3.3	10.4	21.4	36.3	55.1	77.9	104.6
19	0.2	3.4	10.5	21.6	36.6	55.5	78.3	105.1
20	0.2	3.5	10.7	21.8	36.9	55.8	78.8	105.6
21	0.3	3.6	10.8	22.0	37.2	56.2	79.2	106.0
22	0.3	3.7	11.0	22.3	37.4	56.5	79.6	106.6
23	0.3	3.8	11.1	22.5	37.7	56.9	80.0	107.0
24	0.3	3.8	11.3	22.7	38.0	57.3	80.4	107.5
25	0.3	3.9	11.5	22.9	38.2	57.6	80.8	108.0
26	0.4	4.0	11.6	23.1	38.6	58.0	81.3	108.5
27	0.4	4.1	11.8	23.4	38.9	58.3	81.7	109.0
28	0.4	4.2	11.9	23.6	39.2	58.7	82.1	109.5
29	0.5	4.3	12.1	23.8	39.5	59.0	82.5	110.0



SUITE DE LA TABLE XIV.

Argument, Angle horaire en temps.

Sec.	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′
30″	0″5	4″4	12″3	24″0	39″8	59″4	83″0	110″4
31	0.5	4.5	12.4	24.3	40.1	59.8	83.4	110.9
32	0.6	4.6	12.6	24.5	40.3	60.1	83.8	111.4
33	0.6	4.7	12.8	24.7	40.6	60.5	84.2	111.9
34	0.6	4.8	12.9	25.0	40.9	60.8	84.7	112.4
35	0.7	4.9	13.1	25.2	41.2	61.2	85.1	112.9
36	0.7	5.0	13.3	25.4	41.5	61.6	85.5	113.4
37	0.7	5.1	13.4	25.7	41.8	61.9	86.0	113.9
38	0.8	5.2	13.6	25.9	42.1	62.3	86.4	114.4
39	0.8	5.3	13.8	26.2	42.5	62.7	86.8	114.9
40	0.9	5.4	14.0	26.4	42.8	63.0	87.3	115.4
41	0.9	5.6	14.1	26.6	43.1	63.4	87.7	115.9
42	1.0	5.7	14.3	26.9	43.4	63.8	88.1	116.4
43	1.0	5.8	14.5	27.1	43.7	64.2	88.6	116.9
44	1.1	5.9	14.7	27.4	44.0	64.5	89.0	117.4
45	1.1	6.0	14.8	27.6	44.3	64.9	89.5	117.9
46	1.2	6.1	15.0	27.9	44.6	65.3	89.9	118.4
47	1.2	6.2	15.2	28.1	44.9	65.7	90.3	118.9
48	1.3	6.4	15.4	28.3	45.2	66.0	90.8	119.5
49	1.3	6.5	15.6	28.6	45.5	66.4	91.2	120.0
50	1.4	6.6	15.8	28.8	45.9	66.8	91.7	120.5
51	1.4	6.7	15.9	29.1	46.2	67.2	92.1	121.0
52	1.5	6.8	16.1	29.4	46.5	67.6	92.6	121.5
53	1.5	7.0	16.3	29.6	46.8	68.0	93.0	122.0
54	1.6	7.1	16.5	29.9	47.1	68.3	93.5	122.5
55	1.6	7.2	16.7	30.1	47.5	68.7	93.9	123.1
56	1.7	7.3	16.9	30.4	47.8	69.1	94.4	123.6
57	1.8	7.5	17.1	30.6	48.1	69.5	94.8	124.1
58	1.8	7.6	17.3	30.9	48.4	69.9	95.3	124.6
59	1.9	7.7	17.5	31.1	48.8	70.3	95.7	125.1



SUITE DE LA TABLE XIV.

Argument, Angle horaire en temps.

Sec.	8'	9'	10'	11'	12'	13'	14'	15'
0"	125"7	159"0	196"3	237"5	280"7	331"8	384"7	441"6
1	126.2	159.6	197.0	238.3	283.5	332.6	385.6	442.6
2	126.7	160.2	197.6	239.0	284.2	333.4	386.5	443.6
3	127.2	160.8	198.3	239.7	285.0	334.3	387.5	444.6
4	127.8	161.4	198.9	240.4	285.8	335.3	388.4	445.6
5	128.3	162.0	199.6	241.2	286.6	336.0	389.3	446.5
6	128.8	162.6	200.3	241.9	287.4	336.9	390.2	447.5
7	129.4	163.2	200.9	242.6	288.2	337.7	391.1	448.5
8	129.9	163.8	201.6	243.3	289.0	338.6	392.1	449.5
9	130.4	164.4	202.2	244.1	289.8	339.4	393.0	450.5
10	131.0	165.0	202.9	244.8	290.6	340.3	393.9	451.5
11	131.5	165.6	203.6	245.5	291.4	341.2	394.8	452.5
12	132.0	166.2	204.2	246.2	292.2	342.0	395.8	453.5
13	132.6	166.8	204.9	247.0	293.0	342.9	396.7	454.5
14	133.1	167.4	205.6	247.7	293.8	343.7	397.6	455.5
15	133.6	168.0	206.3	248.5	294.6	344.6	398.6	456.5
16	134.2	168.6	206.9	249.2	295.4	345.5	399.5	457.5
17	134.7	169.2	207.6	249.9	296.2	346.3	400.5	458.5
18	135.3	169.8	208.3	250.7	297.0	347.2	401.4	459.5
19	135.8	170.4	208.9	251.4	297.[illegible]	348.1	402.3	460.5
20	136.4	171.0	209.6	252.2	298.6	349.0	403.3	461.5
21	136.9	171.6	210.3	252.9	299.4	349.8	404.2	462.5
22	137.4	172.2	211.0	253.6	300.2	350.7	405.1	463.5
23	138.0	172.9	211.6	254.4	301.0	351.6	406.1	464.5
24	138.5	173.5	212.3	255.1	301.8	352.5	407.0	465.5
25	139.1	174.1	213.0	255.9	302.6	353.3	408.0	466.5
26	139.6	174.7	213.7	256.6	303.5	354.2	408.9	467.5
27	140.2	175.3	214.4	257.4	304.3	355.1	409.9	468.5
28	140.7	175.9	215.1	258.1	305.1	356.0	410.8	469.5
29	141.3	176.6	215.8	258.9	305.9	356.9	411.7	470.5

SUITE DE LA TABLE XIV.

Argument, Angle horaire en temps.

Sec.	8′	9′	10′	11′	12′	13′	14′	15′
30″	141″8	177″2	216″4	259″6	306″7	357″2	412″7	471″5
31	142.4	177.8	217.1	260.4	307.5	358.6	413.6	472.6
32	143.0	178.4	217.8	261.1	308.4	359.5	414.6	473.6
33	143.5	179.0	218.5	261.9	309.2	360.5	415.6	474.6
34	144.1	179.7	219.2	262.8	310.0	361.1	416.6	475.6
35	144.6	180.3	219.9	263.4	310.8	362.2	417.5	476.6
36	145.2	180.9	220.6	264.1	311.6	363.1	418.4	477.6
37	145.8	181.6	221.3	264.9	312.5	363.9	419.4	478.7
38	146.3	182.2	222.0	265.7	313.3	364.8	420.3	479.7
39	146.9	182.8	222.7	266.4	314.2	365.7	421.3	480.7
40	147.5	183.4	223.4	267.2	315.0	366.6	422.2	481.7
41	148.0	184.1	224.1	267.9	315.8	367.5	423.2	482.8
42	148.6	184.7	224.8	268.7	316.6	368.4	424.2	483.8
43	149.2	185.4	225.5	269.5	317.4	369.3	425.1	484.8
44	149.7	186.0	226.2	270.2	318.3	370.2	426.1	485.8
45	150.3	186.6	226.9	271.0	319.1	371.1	427.0	486.9
46	150.9	187.3	227.6	271.8	319.9	372.0	428.0	487.9
47	151.5	187.9	228.3	272.6	320.8	372.9	429.0	488.9
48	152.0	188.5	229.0	273.3	321.6	373.8	430.0	490.0
49	152.6	189.2	229.7	274.1	322.4	374.7	430.9	491.0
50	153.2	189.8	230.4	274.9	323.3	375.6	431.9	492.0
51	153.8	190.5	231.1	275.6	324.1	376.5	432.8	493.1
52	154.4	191.1	231.8	276.4	325.0	377.4	433.8	494.1
53	154.9	191.8	232.5	277.2	325.8	378.3	434.8	495.2
54	155.5	192.4	233.3	278.0	326.7	379.2	435.7	496.2
55	156.1	193.1	234.0	278.9	327.5	380.2	436.7	497.2
56	156.7	193.7	234.7	279.5	328.4	381.1	437.7	498.2
57	157.3	194.4	235.4	280.3	329.2	382.0	438.7	499.2
58	157.8	195.0	236.1	281.1	330.0	382.9	439.6	500.3
59	158.4	195.7	236.8	281.9	330.9	383.8	440.6	501.4

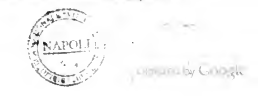


TABLE XV.

Argument, Angle horaire en temps.

M. S.	S.	Différence.	M. S.	S.	Différence.	M. S.	S.	Différence.
0′ 0″	0″000		8′ 10″	0″041	4	12′ 10″	0″205	
1. 0	0.000		20	0.045	4	20	0.217	12
2. 0	0.000		30	0.049	4	30	0.229	12
3. 0	0.001		40	0.053	4	40	0.241	12
4. 0	0.002		50	0.057	4	50	0.254	13
5. 0	0.006		9. 0	0.061	4	13. 0	0.267	13
					5			14
10	0.007		10	0.066		10	0.281	
20	0.008		20	0.071	5	20	0.295	14
30	0.009		30	0.076	5	30	0.310	15
40	0.010		40	0.081	5	40	0.326	16
50	0.011		50	0.087	6	50	0.342	16
6. 0	0.012		10. 0	0.093	6	14. 0	0.359	17
					7			17
10	0.013		10	0.100		10	0.376	
20	0.014		20	0.107	7	20	0.394	18
30	0.016		30	0.114	7	30	0.413	19
40	0.018		40	0.121	7	40	0.432	19
50	0.020		50	0.129	8	50	0.452	20
7. 0	0.022		11. 0	0.137	8	15. 0	0.473	21
					8			21
10	0.024		10	0.145		10	0.494	
20	0.026		20	0.154	9	20	0.516	22
30	0.029		30	0.163	9	30	0.539	23
40	0.032		40	0.173	10	40	0.563	24
50	0.035		50	0.183	10	50	0.587	24
8. 0	0.038		12. 0	0.194	11	16. 0	0.612	25

Le second terme du tableau de la page 292, donné par cette Table, est toujours additif; au lieu que le premier terme fourni par la table précédente, n'est additif que dans les passages inférieurs des étoiles circompolaires.

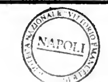


TABLE XVI.

PARALLAXE DU SOLEIL

à divers degrés de hauteur, et en différens temps de l'année, en supposant la moyenne de 8"5.

Hauteur en degrés.	1 Janvier.	1 Février. Décembre.	1 Mars. Novembre.	1 Avril. Octobre.	1 Mai. Septembre.	1 Juin. Août.	1 Juillet.
0°	8"65	8"62	8"57	8"50	8"43	8"38	8"35
4	8.62	8.60	8.55	8.48	8.41	8.36	8.33
8	8.56	8.54	8.49	8.42	8.35	8.30	8.27
12	8.46	8.44	8.39	8.32	8.24	8.21	8.20
16	8.30	8.28	8.24	8.17	8.09	8.06	8.05
20	8.12	8.16	8.05	7.99	7.93	7.88	7.87
24	7.90	7.88	7.83	7.77	7.71	7.66	7.65
28	7.77	7.75	7.70	7.64	7.58	7.53	7.52
32	7.30	7.29	7.24	7.21	7.15	7.11	7.10
36	6.97	6.96	6.93	6.88	6.82	6.78	6.77
40	6.60	6.59	6.56	6.51	6.46	6.42	6.41
44	6.20	6.19	6.16	6.11	6.06	6.02	6.01
48	5.78	5.77	5.74	5.69	5.64	5.60	5.59
52	5.28	5.26	5.24	5.23	5.20	5.17	5.16
56	4.80	4.78	4.79	4.75	4.72	4.69	4.68
58	4.55	4.57	4.54	4.50	4.47	4.44	4.43
60	4.30	4.29	4.28	4.25	4.23	4.21	4.20
62	4.04	4.03	4.02	3.99	3.97	3.95	3.94
64	3.78	3.77	3.76	3.73	3.71	3.69	3.68
66	3.51	3.50	3.49	3.46	3.44	3.42	3.41
68	3.24	3.23	3.21	3.18	3.16	3.14	3.13
70	2.96	2.95	2.92	2.91	2.89	2.88	2.88
72	2.68	2.67	2.64	2.63	2.61	2.60	2.60
74	2.39	2.38	2.35	2.34	2.32	2.31	2.31
76	2.11	2.10	2.07	2.06	2.04	2.03	2.03
78	1.80	1.79	1.78	1.77	1.75	1.74	1.74
80	1.50	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.45
82	1.20	1.20	1.19	1.18	1.17	1.16	1.16
84	0.90	0.90	0.90	0.89	0.88	0.88	0.87
86	0.60	0.60	0.60	0.59	0.59	0.58	0.58
88	0.30	0.30	0.30	0.30	0.29	0.29	0.28
90	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

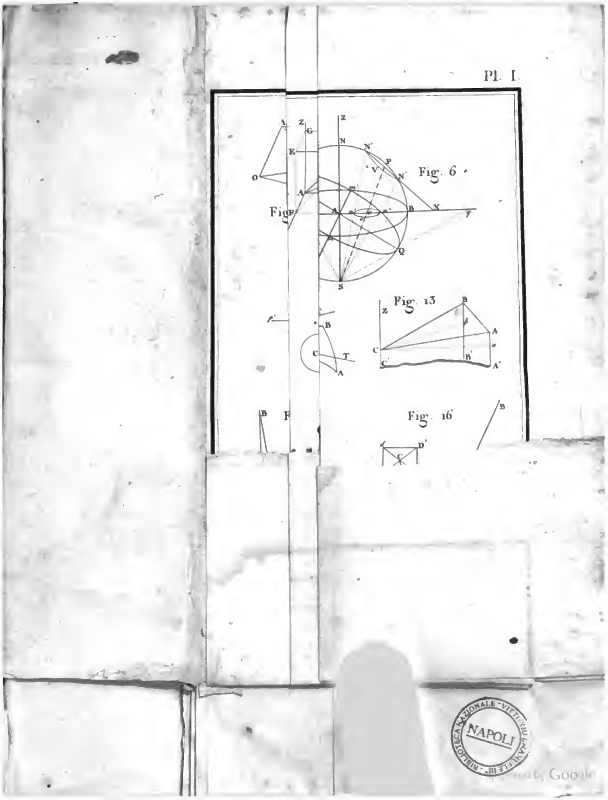


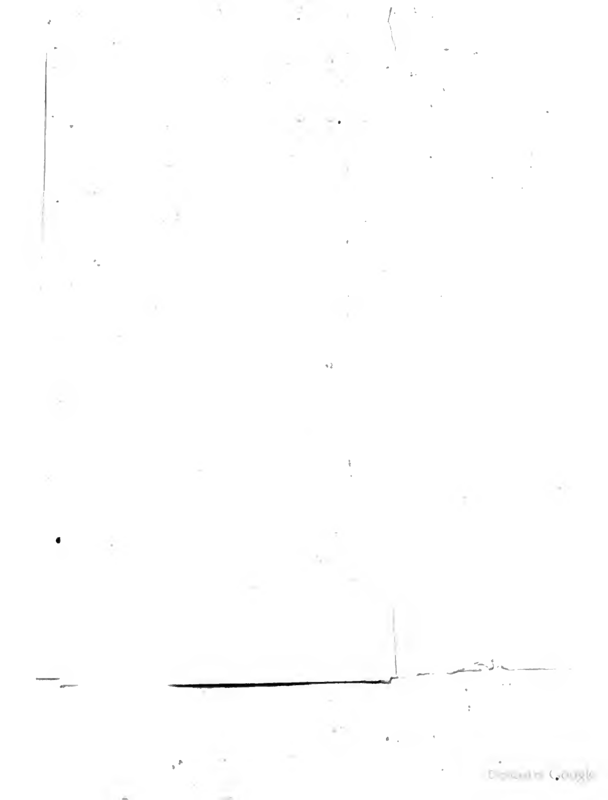
Supplément à l'Errata du texte, page 320.

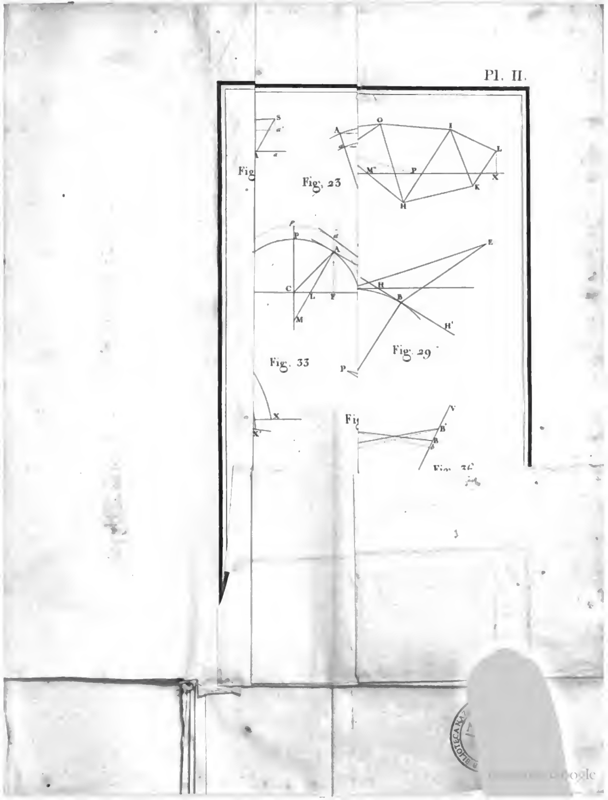
N. B. Pendant que l'on imprimait les Tables qui terminent cet ouvrage, j'ai découvert, dans le texte, de nouvelles fautes d'impressions que je m'empresse d'indiquer ici. Toutes ces fautes, quoiqu'assez légères, seraient sans doute en plus petit nombre, s'il m'eût été possible de corriger plusieurs fois les mêmes épreuves. Cependant les Tables Géodésiques qui ont été revues avec le plus grand soin, ne sont pas suivies de l'Errata annoncé dans la Table des matières, parceque je n'y ai trouvé aucune erreur.

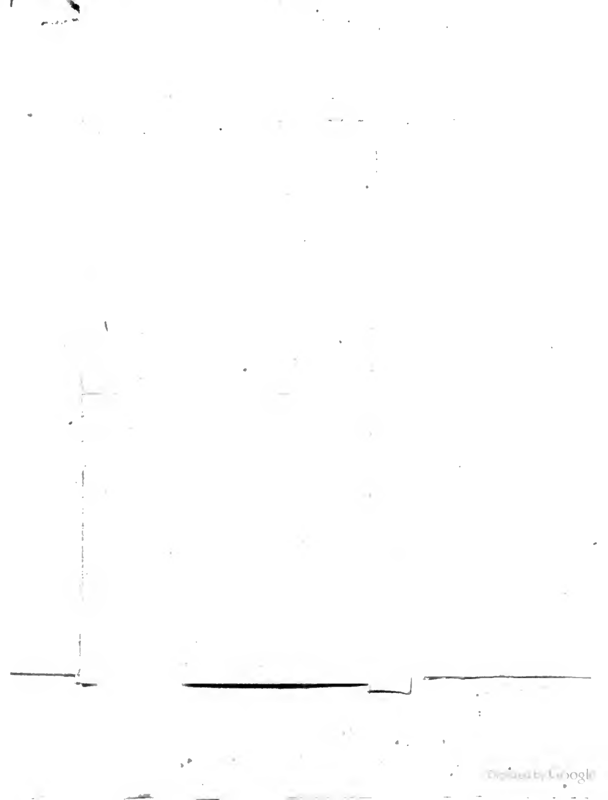
Page 17, ligne 15; $a > b$, *lisez*, $a > c$.
Page 49, ligne 15 en remontant, au dénominateur, $1 -$, *lisez* $1 +$
Page 76, ligne 18; ne le couvre pas, *lisez*, ne le coupe pas.
Page 96, ligne 6; mettez une virgule après, d'exposer.
Page 104, ligne 17, comme le voit, *lisez* comme on le voit.
Page 144, ligne dernière, au lieu du facteur α, *lisez*, a.
Page 152, ligne 5; $1^{s} \frac{\varphi}{2}$, *lisez*, $1^{s} - \frac{\varphi}{2}$.
Page 158, ligne 3 en remontant, $= \cos Z$, *lisez* $= -\cos Z$; et en marge mettez Fig. 28.
Page 159, ligne 9 en remontant, $\tang \frac{1}{1} dL$, *lisez* $\tang \frac{1}{2} dL$.
Page 160, ligne 8, au lieu de PCB, *lisez* PNB; et au lieu de $-NBM$, *lisez* $+NBM$.
Page 162, ligne 4 en remontant, $\frac{1}{2}(2L' + dL)$, *lisez* $\sin \frac{1}{2}(2L' + dL)$.
Ibidem, ligne 5 en remontant L', *lisez* L.
Page 182, ligne 4; après Cap de Bonne-Espérance, *lisez*, (*nouvelle Guinée*).
Page 183, ligne 9 en remontant; après perpendiculaire, mettez une virgule.
Page 187, deuxième colonne du Tableau, ligne 2, après 37,0093, *lisez* Australe.
Page 195, ligne 12, au numérateur du deuxième membre, *lisez* $\left(\frac{du'}{d\psi}\right)$.
Page 197, lignes 9 et 10 en remontant; les coefficiens différentiels dans les deux derniers termes de chaque ligne sont respectivement $\left(\frac{du'}{d\psi}\right)$ et $\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)$,
Page 268, ligne 11 en remontant, $\cos D$, lisez $\cos Z$.
Page 276, ligne 2 en remontant, ou après, *lisez* et après.
Page 320. Errata du texte, ligne 4 en remontant; page 191, *lisez*, page 192; et ne faites pas la correction indiquée pour la page 175.

Pl. I.

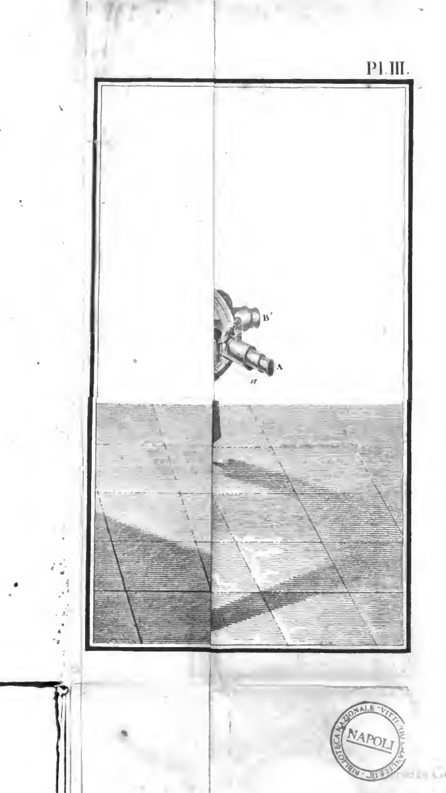


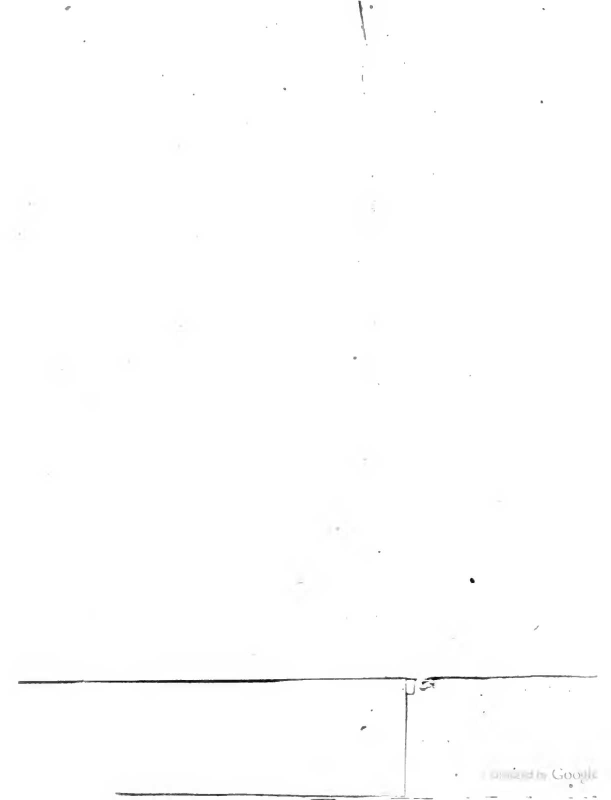



S
Fig
Fig. 23
A
O
I
L
M'
P
X
K
H
p
P
a
A
E
C
L
F
H
B
M
H'
Fig. 33
Fig. 29
P
X
X'
V
B'
B

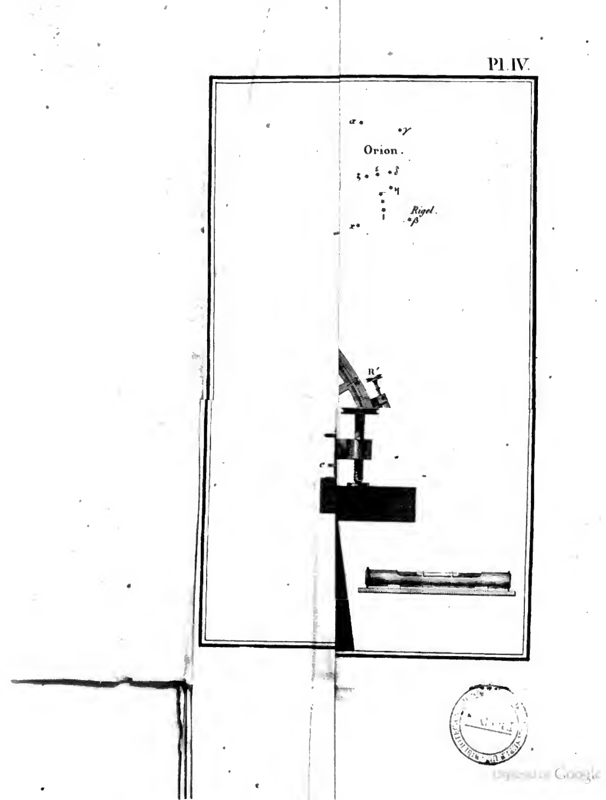


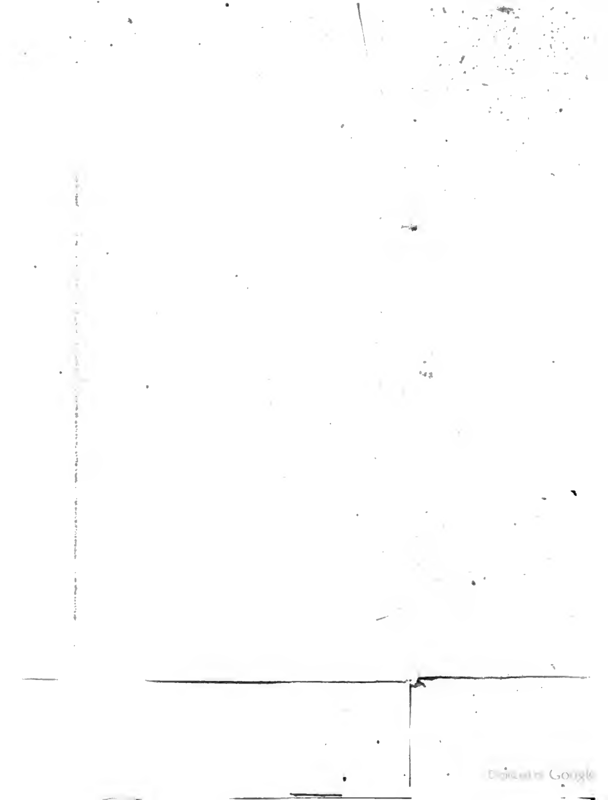
Pl. III.

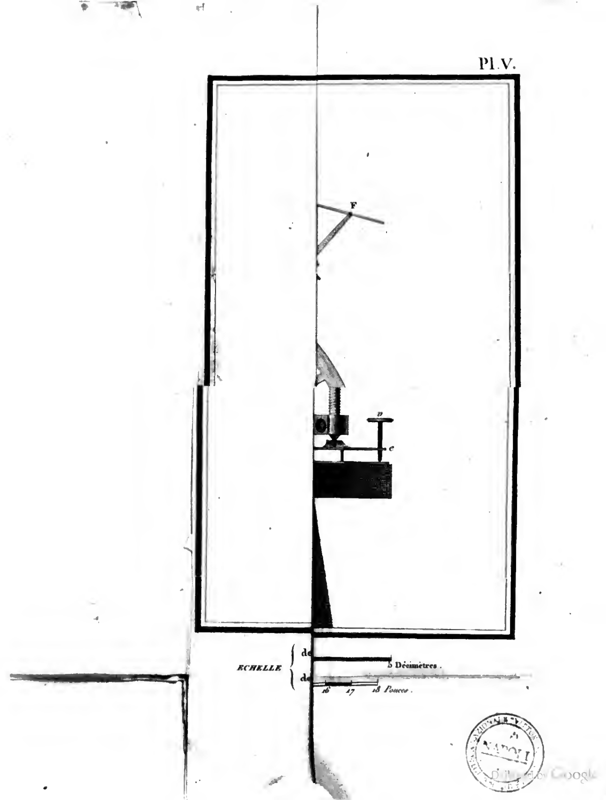


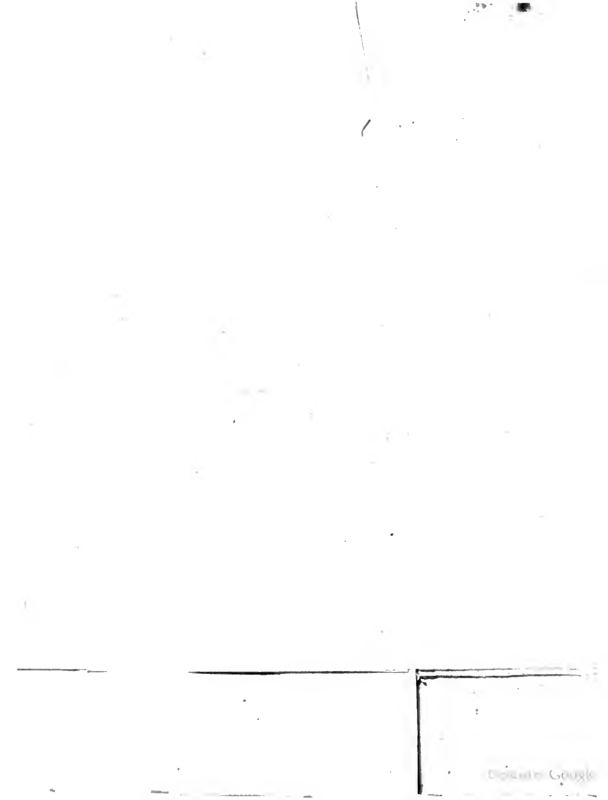


Pl. IV.






F
n
e
ECHELLE
de
de
5 Décimètres.
16
17
18 Pouces.



Pl. VI.

Petite Ourse

Polaire

Grande Ourse

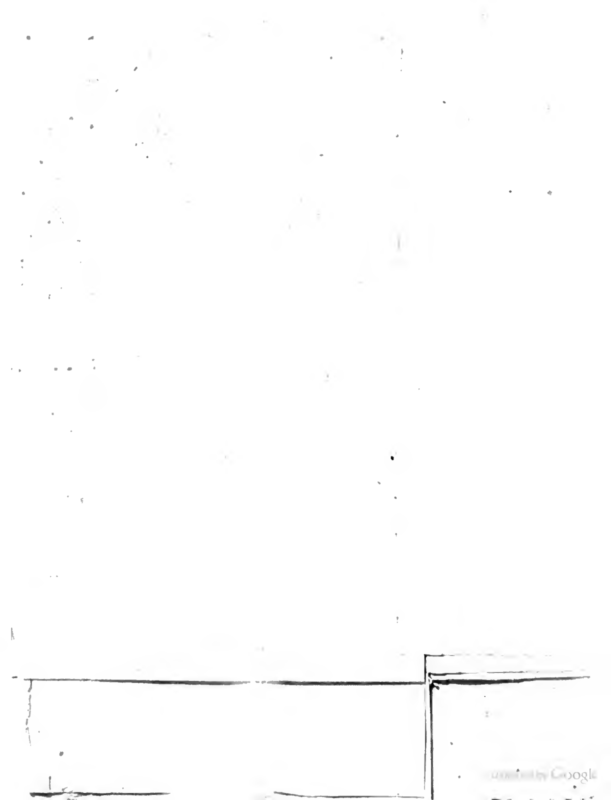
α

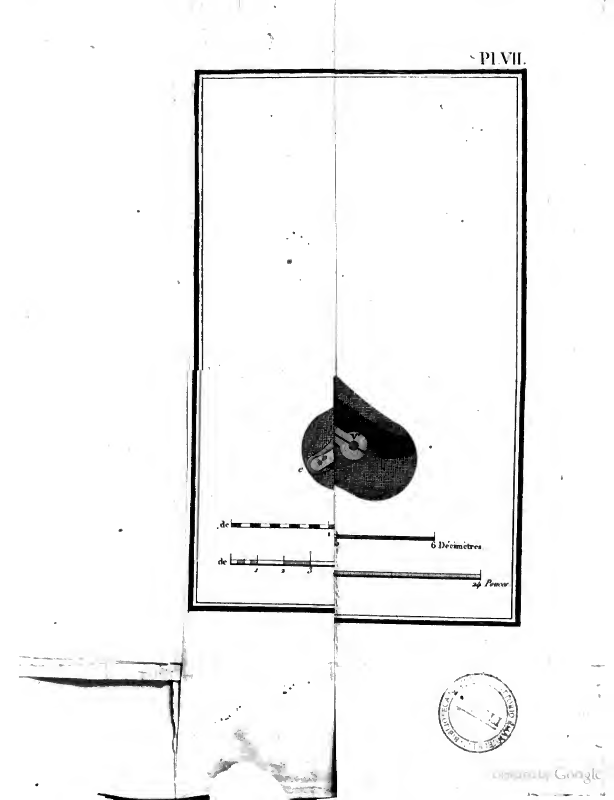
β

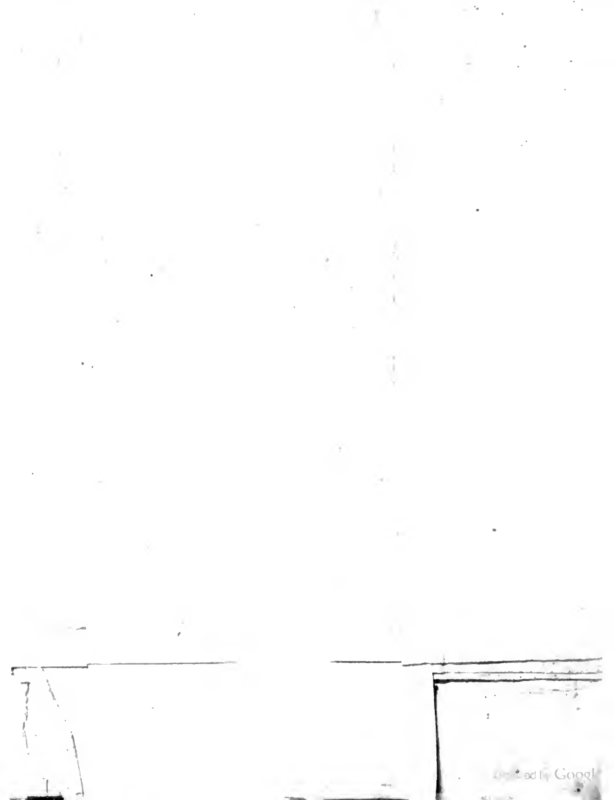
γ

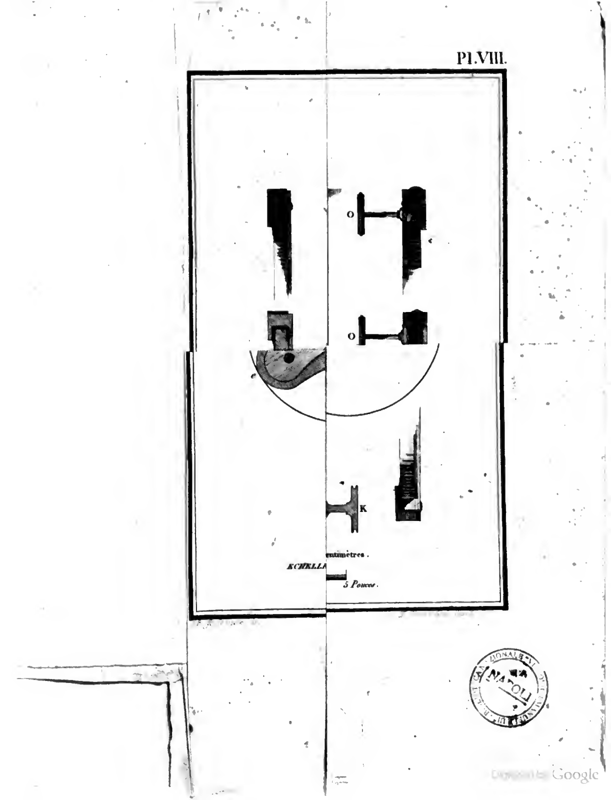
δ

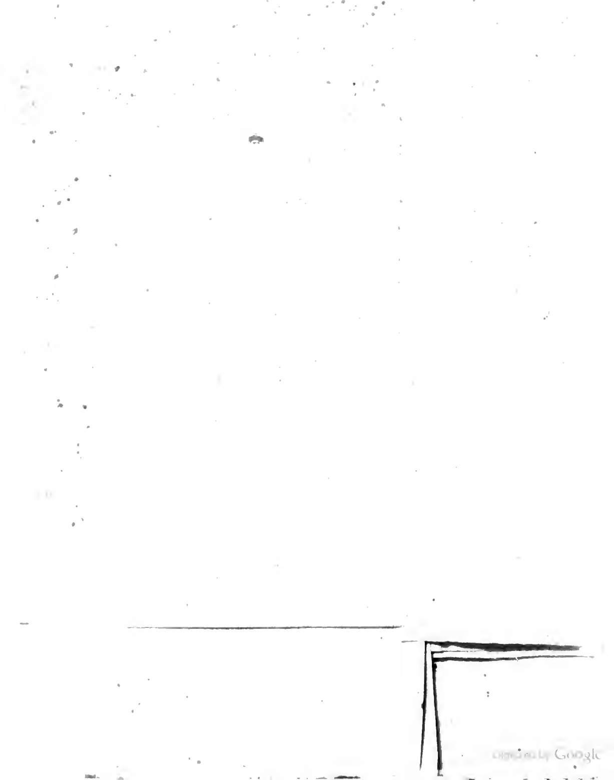
ε

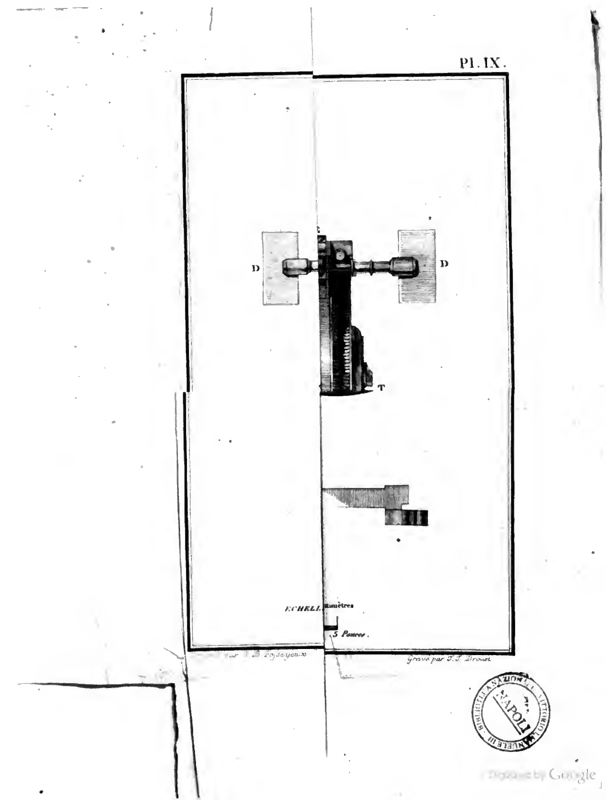



e
de
1
6 Décimètres
de
1
2
3
24 Pouces




O
O
K
entimètres .
ECHELLE
5 Pouces .




Pl. IX.
D
D
T
ECHELL
limètres
5 Pouces.
Gravé par J. J. Drouet

